Міністерство освіти і науки України
Національний лісотехнічний університет України
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра комп’ютерної інженерії, математики і фізики

Горбачевський І.Я.

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» галузей знань «Технології захисту навколишнього середовища», «Деревообробні та меблеві технології», «Будівництво та цивільна інженерія», «Хімічні технології та інженерія»

Львів – 2025

УДК 51:22 (075.7)

ББК 22.11я73

Укладач: Горбачевський І.Я. – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп’ютерної інженерії, математики і фізики, Національний лісотехнічний університет України.

Рецензенти: Станкевич В.З. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри механіки, Львівський національний університет імені Івана Франка;

Онишкевич В.М. - кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп’ютерної інженерії, математики і фізики, Національний лісотехнічний університет України

Рекомендовано до друку кафедрою комп’ютерної інженерії, математики і фізики НЛТУ України 5 травня 2025 р., протокол № 11.

Рекомендовано до видання науково-методичною радою Інституту комп’ютерних наук та інформаційних технологій НЛТУ 13 травня 2025 р., протокол № 4.

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» галузей знань «Технології захисту навколишнього середовища», «Деревообробні та меблеві технології», «Будівництво та цивільна інженерія», «Хімічні технології та інженерія» / Укл.: І.Я.Горбачевський. Львів: ННІ КНІТ НЛТУ України, 2025. 64 с.

У методичних вказівках розглядаються розділи вищої математики, що входять у семестрові навчальні програми повнострокової, короткострокової й заочної форм навчання. Є 16 розділів з задачами по 30 варіантів, до кожного розділу приводяться типові приклади, які можна використати при самостійному розв’язуванні. Наводиться список рекомендованої навчально-методичної літератури, що збігається з силабусом дисципліни відповідного напрямку. Вказівки можуть бути корисними для студентів, аспірантів інших спеціальностей з науковим або технічним профілем і акцентом на природничі дисципліни .

©Національний лісотехнічний університет України, 2025

©Горбачевський І.Я., 2025

ВСТУП

Математика – фундаментальна дисципліна, що лежить в основі таких дисциплін, як фізика, інформатика, інженерія, економіка, штучний інтелект, тощо. Знання вищої математики відкриває двері до професій у високотехнологічних сферах, фінансах, аналітиці даних, криптографії та інших. Вона допомагає моделювати й аналізувати природні та соціальні явища, робити прогнози і встановлювати достовірність отриманих результатів.

Дана публікація базується на освітньо-професійних програмах дисциплін галузей знань G1 «Хімічні технології та інженерія», G2 «Технології захисту навколишнього середовища», G14 «Деревообробні та меблеві технології», G19 «Будівництво та цивільна інженерія» і має за мету дати студентові уміння аналізувати явища чи процеси, моделюючи їх функціями; досліджувати функції методами математичного аналізу, визначати змінні та інтегральні характеристики, оцінювати, застосовуючи засоби диференціального та інтегрального числення; дати поняття про ряди і їх застосування, оцінювати достовірність результатів методами теорії ймовірностей та випадкових величин. Завданням дисципліни є якісна підготовка бакалавра, виховання професійної компетентності та професійного кругозору, уміння застосовувати отримані теоретичні та практичні завдання у фаховій діяльності.

Вивчення навчальної дисципліни передбачає формування та розвиток у студентів таких компетентностей: Інтегральної –

здатність розв’язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у деревообробному та меблевому виробництвах,

проблеми технічного і технологічного характеру у сфері екології, охорони довкілля, збалансованого природокористування;

проблеми хімічних технологій та інженерії переробки деревини;

проблеми технологічного характеру у сфері екології, охорони довкілля, збалансованого природокористування;

здатність розв’язувати складні спеціалізовані задачі будівництва та цивільної інженерії,

і відповідних до напрямків спеціальних компетентностей.

Подано 30 варіантів завдань для самостійного опрацювання, що систематизовані відповідно до документа «Робоча програма навчальної дисципліни». У полі особливої уваги практичні задачі , що мають рекомендаційні висліди.

ЗМІСТ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Дослідити функцію на неперервність.

Завдання 2. Обчислити границі.

Завдання 3.Обчислити похідну, якщо функція задана явно, неявно і параметрично.

Завдання 4. Практичні задачі з використанням похідної.

Завдання 5. Похідна за напрямком і градієнт.

Завдання 6. Метод найменших квадратів.

Завдання 7. Невласні інтеграли.

Завдання 8. Практичні задачі з використанням визначеного інтеграла.

Завдання 9. Збіжність знакосталих числових рядів.

Завдання 10. Збіжність знакозмінних числових рядів.

Завдання 11. Розв'язання деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку.

Завдання 12. Комплексні числа та дії з ними.

Завдання 13. Практичні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

Завдання 14. Задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною.

Завдання 15. Розв'язання ймовірнісних задач з використанням формул Бейєса та повної ймовірності.

Завдання 16. Практичні задачі з використанням числових характеристик випадкових величин.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Завдання 1

Дослідити функцію на неперервність: визначити чи є точки розриву та їх характер; побудувати схематичний графік.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-2x, \ x<-1\\ x^2+1, \ -1\le x<2\\ x-1, \ x\ge 2\end{cases}}$$

Розв'язання

Функція задана різними формулами на різних проміжках. На кожному з проміжків $(-\infty;-1)$; $(-1;2)$, $(2;+\infty)$ вона неперервна (як елементарна).

Отже, розрив може бути лише в точках $x = -1$ та $x = 2$. Дослідимо за чергою.

$x = -1$. Знайдемо односторонні границі функції в цій точці:

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} (-2x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} (x^2 + 1) = 2$.

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

Односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою та дорівнюють значенню функції в цій точці. Звідки випливає, що функція неперервна в точці $x = -1$.

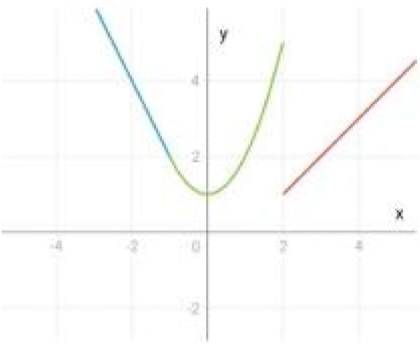
Розглянемо $x = 2$.

Знайдемо односторонні границі функції в цій точці:

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (x^2 + 1) = 5$; $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} (x - 1) = 1$.

Отже, односторонні границі функції в цій точці існують , але не рівні між собою, таким чином, функція $f(x)$ розривна в точці $x = 2$, яка є точкою розриву 1- го роду

Побудуємо графік функції



Завдання 2

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$ г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg5x}{x}$

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 + 2x - 5}{x^3 + 3x + 1}$ д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-4} \right)^x$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$

Розв’язання.

а) Маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Перетворимо дану функцію, розклавши чисельник та знаменник на множники :

$x^2+4x-5=0$

$x_1=1;\ \ x_2=-5$ $\qquad\qquad\qquad$ $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

$x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$

Тоді, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+5}{x+1}=\frac{6}{2}=3.$

б) Маємо невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$. Перетворимо дану функцію, розділивши чисельник та знаменник на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-5}{x^3+3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{3+0-0}{1+0+0}=3$$

в) Знову маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. У цьому випадку необхідно чисельник та знаменник дробу помножити на вираз, спряжений до чисельника.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2+x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}$

Безпосередня підстановка $x=0$ приводить до невизначеності $\frac{0}{0}$.

Щоб можна було застосувати 1-шу важливу границю, помножимо чисельник та знаменник дробу на 5, тоді отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1,\quad \cos 0=1$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x\cdot x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=5$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^x$

У цьому випадку маємо невизначеність 1^∞.

Для розкриття цієї невизначеності використовуємо 2-гу важливу границю, виконавши наступні тотожні перетворення:

$$\frac{x+1}{x-4}=\frac{x-4+5}{x-4}=1+\frac{5}{x-4}$$

Введемо позначення:

$$\frac{5}{x-4}=\alpha;\ \ x-4=\frac{5}{\alpha};\ \ x=\frac{5}{\alpha}+4$$

Тоді, якщо $x\to\infty$, то $\alpha\to 0$. Таким чином , маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{5}{\alpha}+4}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{5}{\alpha}}\cdot(1+\alpha)^4=\lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^5\cdot\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^4$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, і $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^4=1$, отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^{2x}=\lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^5\cdot\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^4=e^5$$

<u>Завдання 3</u>

Обчислити похідні:

<u>Розв'язання</u>

1. $y=4\arcsin\frac{\sqrt{x+1}}{2}$. $\qquad y'=4\left(\arcsin\frac{\sqrt{x+1}}{2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}(x+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

$$y'=\frac{2}{\sqrt{(x+1)(3-x)}}.$$

2. $y^2-x^2=arctg\,y$.

Диференціюємо ліву й праву частини рівності, зважаючи що $y=y(x)$.

$2yy'-2x=\frac{1}{1+y^2}\cdot y'$. Звідти знайдемо y'.

$$y' = \frac{2(1+y^2)}{2y^3+2y-1}.$$

3. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

Формула для обчислення $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Обчислимо вирази у чисельнику і в знаменнику

$y'(t) = 3\sin^2 t \cdot \cos t$; $\qquad x'(t) = 2 - 2\cos 2t$.

$$y'(x) = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{2(1-t)}.$$

Завдання 4

Практичні задачі з використанням похідної

Стовбур дерева завдовжки 10 м має форму зрізаного конуса з діаметрами основ 1,5 м і 0,5 м. Необхідно вирізати з цього стовбура балку з прямокутним перерізом, сторони якого відносяться як 2:1, а вісь збігається з віссю стовбура. Якими мають бути розміри балки, щоб її об'єм був найбільшим?

Розв'язання

Зрізаний конус має: довжину (висоту) h=10 м, діаметр нижньої основи D_1=1,5 м, тобто радіус R_1=0,75 м, діаметр верхньої основи D_2=0,5 м, тобто радіус R_2=0,25 м.

Радіус стовбура змінюється лінійно вздовж осі x (де x=0 — нижня основа, x=10 — верхня основа). Рівняння радіуса як функції від x можна знайти через лінійну інтерполяцію:

$$R(x) = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{h} \cdot x = 0,75 + \frac{0,25 - 0,75}{10} \cdot x = 0,75 - 0,05x, \quad 0 \le x \le 10.$$

При x=0 R(0)=0,75 м, при x=10 R(10)=0,75−0,05·10=0,25 м, що відповідає умовам задачі.

Балка має прямокутний переріз зі сторонами a і b, де a=2b (за умовою співвідношення 2:1). Переріз балки вписаний у круглий переріз стовбура, який є колом із радіусом R(x). Оскільки вісь балки збігається з віссю стовбура, прямокутник симетричний відносно центра кола.

Діагональ прямокутного перерізу a×b дорівнює:

$$d = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(2b)^2+b^2} = \sqrt{4b^2+b^2} = \sqrt{5b^2} = b\sqrt{5}.$$

Діагональ перерізу $b\sqrt{5}$ має бути величиною меншою або рівною найменшому діаметру стовбура, щоб балка проходила через весь стовбур. Найменший діаметр — на верхній основі (x=10):

$$2R(10) = 2 \cdot 0,25 = 0,5\, м.$$

Отже: $b\sqrt{5} \le 0,5$.

Звідси:

$$b \le \frac{0,5}{\sqrt{5}} = \frac{0,5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{0,5\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{10} \approx 0,2236\, м.$$

Тоді $a = 2b \le 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.4472\ м$.

Об’єм балки дорівнює площі перерізу a·b помноженій на довжину h=10 м:

$$V = a \cdot b \cdot h = (2b) \cdot b \cdot 10 = 20b^2\, м^3.$$

Щоб максимізувати V, потрібно взяти максимально можливе b. З попереднього:

$$b_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{10}, \quad a_{\max} = 2b_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Відтак, $V_{\max} = 2(b_{\max})^2 = 20 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{20 \cdot 5}{100} = 1\, м^3$.

Завдання 5.

Похідна за напрямком і градієнт

Задано: функція $f(x,y)$, точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ і вектор $\vec{s}\left(s_x, s_y\right)$. Обчислити різницю між швидкістю зміни функції у заданому напрямку і швидкістю у напрямку найбільшої зміни.

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + 5xy^2, \qquad M_0(1,1), \quad \vec{s}\ (2,1)$$

Розв’язання

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 + 5y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y + 10xy.$$

Ті самі похідні обчислимо в точці M_0 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = 11$; $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = 16$.

Знайдемо координати вектора $\vec{s}$

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}; \qquad s_x = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad s_y = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Похідна у вказаному напрямку рівна $\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{M_0} = 11 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 16 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{38}{\sqrt{5}} \approx 16.99$.

Найбільша швидкість зміни функції $f(x, y)$ реалізується у напрямку ґрадієнта і дорівнює довжині вектора $\left| \left. \vec{grad}\, f \right|_{M_0} \right|$.

$$\vec{grad}\, f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right\}; \qquad \left. \vec{grad}\, f \right|_{M_0} = \{11; 16\},$$

$$\left| \left. \vec{grad}\, f \right|_{M_0} \right| = \sqrt{11^2 + 16^2} = \sqrt{377} \approx 19.42$$

Шукана різниця між швидкістю зміни по напрямку і найбільшої швидкістю у напрямку ґрадієнта рівна -2,43.

Завдання 6.
Метод найменших квадратів

Експериментальним шляхом отримано 5 значень функції $y = f(x)$ при п'ятьох значеннях аргумента, що і записано в таблиці. Потрібно методом найменших квадратів збудувати функцію функцію $y = f(x)$ у вигляді $y = ax + b$, яка б з найменшим відхиленням описала дані експерименту.

x	1	2	3	4	5
y	3,5	4,4	3,2	1,8	2,4

Розв'язання

При апроксимації лінійною функцією $y = ax + b$ у кожній точці x_i матимемо відхилення, що дорівнює $ax_i + b - y_i$ (i=1, 2, …5). Будемо вимагати, щоб сума квадратів усіх відхилень, тобто функція $S(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_5 + b - y_5)^2$ мала найменше значення.

Для цього необхідно, щоб частинні похідні $\frac{\partial S}{\partial a}$ і $\frac{\partial S}{\partial b}$ стали рівними нулю.

Обчислимо ці похідні

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{5}\left(ax_i + b - y_i\right)x_i = 2\left(a\sum_{i=1}^{5}x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{5}x_i - \sum_{i=1}^{5}x_iy_i\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{5}\left(ax_i + b - y_i\right) = 2\left(a\sum_{i=1}^{5}x_i + 5b - \sum_{i=1}^{5}y_i\right)$$

Якщо прирівняємо кожну частинну похідну до нуля, отримаємо систему рівнянь відносно невідомих a и b:

$$a\sum_{i=1}^{5}x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{5}x_i = \sum_{i=1}^{5}x_iy_i,$$
$$a\sum_{i=1}^{5}x_i + 5b = \sum_{i=1}^{5}y_i.$$

Для зручності, щоб сформувати систему рівнянь, підрахуємо потрібні компоненти:

x	1	2	3	4	5	15=1+2+3+4+5
y	3,5	4,4	3,2	1,8	2,4	15,3=3,5+4,4+3,2+1,8+2,4
x^2	1	4	9	16	25	55=1+4+9+16+25
xy	3,5	8,8	9,6	7,2	12	41,1=3,5+8,8+9,6+7,2+12

$\sum$

Система рівнянь вийшла такою

$$\begin{cases} 55a + 15b = 41{,}1 \\ 15a + 5b = 15{,}3 \end{cases}.$$

Розв'яжемо методом Крамера.

Головний визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 55 \cdot 5 - 15 \cdot 15 = 50 \neq 0,$ а тому система має лише 1 розв'язок. Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 41{,}1 & 15 \\ 15{,}3 & 5 \end{vmatrix} = 41{,}5 \cdot 5 - 15{,}3 \cdot 15 =- 24,$$

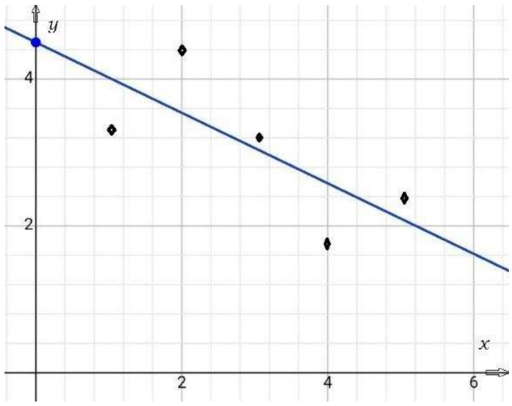
$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 55 & 41{,}1 \\ 15 & 15{,}3 \end{vmatrix} = 15{,}3 \cdot 55 - 15 \cdot 41{,}1 = 225.$$

Відтак,

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{-24}{50} =- 0{,}48 \qquad\qquad b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{225}{50} = 4{,}5.$$

Остаточно, збудована функція є такою: $y = -0{,}48x + 4{,}5$.

Рисунок до задачі



Завдання 7

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність

А) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+7x+12}$ Б) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Розв'язання

А) Наслідуємо означення невласного інтеграла з безмежною границею. Тому

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+7x+12}=\lim_{a\to\infty}\int\limits_2^{a}\frac{dx}{x^2+7x+12}.$$

Тричлен у знаменнику має два корені $x_1=-3,\ x_2=-4,$ відтак

$$\frac{1}{x^2+7x+12}=\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{C_1}{x+3}+\frac{C_2}{x+4}.$$

Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо $C_1+C_2=0,\quad 4C_1+3C_2=1,$ $C_1=1,\quad C_2=-1.$ Шуканий інтеграл стає сумою двох інтегралів від елементарних дробів

$$\int\limits_2^{a}\frac{dx}{x^2+7x+12}=\int\limits_2^{a}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)dx=\left(\ln|x+3|-\ln|x+4|\right)\Big|_2^a=\ln\frac{6}{5}-\ln\frac{a+4}{a+3}.$$

Невласний інтеграл рівний

$$\lim_{a\to\infty}\left(\ln\frac{6}{5}-\ln\frac{a+4}{a+3}\right)=\ln\frac{6}{5}-\ln\left(\lim_{a\to\infty}\frac{a+4}{a+3}\right)=\ln\frac{6}{5}.$$ Є збіжним.

Б) Підінтегральна функція має розрив при $x=1,$ відтак за означенням

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\ln x}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\right)=+\infty.$$

Розбіжний.

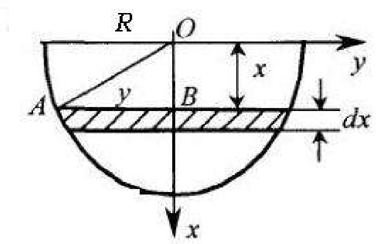
Завдання 8

Практичні задачі з використанням визначеного інтеграла

Знайти силу тиску води на вертикальну стінку у формі півкруга, радіус якого лежить на поверхні.

Розв'язання

За законом Паскаля сила тиску рідини на площадку обчислюється за формулою $P = \rho ghS$, де ρ -густина рідини, ***g*** – прискорення сили тяжіння, ***h*** – глибина занурення, S – площа площадки.



Позначимо глибину занурення ***x*** (див. рис.). На цій глибині уявимо елементарну площадку (заштриховано) , яку вважатимемо циліндром радіусом ***y*** і висотою ***dx***.

З трикутника АОВ знаходимо, що $y = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{9 - x^2}$. Тоді площа площадки $S = 2ydx = 2\sqrt{9 - x^2}dx$. Обчислимо диференціал тиску на елементарну площадку $dP = \rho gx \cdot 2ydx = 2\rho gx\sqrt{9 - x^2}dx$. Проінтегруємо і знайдемо шуканий тиск

$$P = 2\rho g\int_0^3 x\sqrt{9 - x^2}dx = -2\rho g \cdot \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}d\left(9 - x^2\right) = 18\rho gR$$

Завдання 9

Дослідити чи збігаються такі ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{2^n n}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

Розв'язання

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$

$$u_n=\frac{3n-1}{\sqrt{n}\cdot 7^{n/2}},\qquad u_{n+1}=\frac{3n+2}{\sqrt{n+1}\cdot 7^{(n+1)/2}},\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n+2}{3n-1}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{7^{n/2}}{7^{(n+1)/2}}.$$

Ознака Даламбера:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{7^{n/2}}{7^{(n+1)/2}}\right)=7^{-1/2}\approx 0.378<1\,.$$

Ряд є збіжним.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{2^n n}}$.

Маємо $u_n=\frac{3n+1}{\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{n}}$. Застосуємо ознаку Даламбера: $u_{n+1}=\frac{3n+4}{\sqrt{2^{n+1}}\cdot\sqrt{n+1}}$.

Відтак, $q=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n+1}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2^n}{2^{n+1}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707<1$.

За ознакою Даламбера встановлено, що ряд є збіжним.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

Використаємо кореневу ознаку Коші.

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=0.$$

За цією ознакою ряд є збіжним.

Завдання 10

Збіжність знакозмінних числових рядів

Щоб перемножити два знакозмінних ряди необхідно, щоб вони були збіжні, причому один з них абсолютно (теорема Мертенса). Дано два знакозмінні ряди а) і б). Встановити, чи вдасться їх гарантовано перемножити. Відповідь обґрунтувати.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$ б) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+..$

Розв’язання

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$. Ряд є збіжним, бо виконуються умови теореми Лейбніца:

Ум.1 $u_1 = \frac{3}{10} > \cdots u_9 = \frac{19}{450} > \cdots$.

Ум. 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n(n+1)} = 0$.

Чи абсолютно? Беремо ряд з додатних членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$. Якщо вибрати для порівняння гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{5n(n+1)} : \frac{1}{n} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)n}{5n(n+1)} = \frac{2}{5}$, то за другою порівняльною ознакою встановимо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$ є розбіжним. Отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$ збігається умовно.

б) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ..$ За обома умовами теореми Лейбніца ряд збігається. Ряд з додатних членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжним рядом Діріхле. Відтак, ряд $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ..$збігається абсолютно.

Відповідь: Ці два ряди можна гарантовано перемножити.

<u>Завдання 11</u>

Розв'язання деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку:

a) $y\sin\frac{x}{2}dx - cos\frac{x}{2}dy = 0.$

b) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$

c) $y' - ytgx = \frac{1}{cos^3 x}.$

d) $xy' + y = xy^2.$

<u>Розв'язання.</u>

a) $y\sin\frac{x}{2}dx - cos\frac{x}{2}dy = 0.$

Спочатку відокремимо змінні $\frac{dy}{y} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$. При цьому $\cos\frac{x}{2} \neq 0$.

Інтегруємо: $\int \frac{dy}{y} = \ln y$ $\qquad \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} dx = -2\ln\cos\frac{x}{2} + C \cdot$

Змінимо С і прирівняємо. Одержимо $\ln y = \ln \frac{C}{\cos^2(x/2)}$. Звідси

$$y(x) = \frac{C}{\cos^2(x/2)}.$$

b) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{4}{x}y + 2$.

Це однорідне диференціальне рівняння. Зробимо підстановку:

$y = xz \quad \Rightarrow \quad y' = z + xz'$.

Внаслідок підстановки:

$$z' = \frac{(xz)^2}{x^2} + \frac{4}{x}(xz) + 2 \ .$$

Перенесемо z в праву частину

$z' = z^2 + 4z + 2 - z \quad \Rightarrow \quad z' = z^2 + 3z + 2$.

Відокремимо змінні

$$\frac{dz}{z^2 + 3z + 2} = \frac{dx}{x}.$$

Розкладемо знаменник:

$z^2 + 3z + 2 = (z+1)(z+2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}$

Розв'язуємо систему:

1=A(z+2)+B(z+1)

Звідси знайдемо невідомі:

- при z=−2 : B = − 1
- при z= −1 A=1

Отже: $\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$

Інтегруємо обидві частини й дістанемо

$$\ln\left|\frac{z+1}{z+2}\right| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \frac{z+1}{z+2} = Cx$$, C – стала інтегрування.

Нагадаємо, що $z = \frac{y}{x}$. Повертаємося до y

$$\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}+2} = Cx \quad \Rightarrow \quad \frac{y+x}{y+2x} = Cx .$$

Це — неявний розв’язок рівняння.

Звідси можна отримати розв’язок у явній формі $y = \frac{2Cx^2 - x}{1 - Cx}$.

c) $y' - ytgx = \frac{1}{cos^2 x}$.

Це лінійне диференціальне рівняння. Застосуємо метод Бернулі:

$$y = u \cdot w \quad \Rightarrow \quad y' = u'w + uw' .$$

Підставимо $u'w + uw' - uw \cdot tgx = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad u'w + u\left(w' - w \cdot tgx\right) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Крок 1. $w' - w \cdot tgx = 0$, $\frac{dw}{w} = tgx \cdot dx$, $\quad \ln w = -\ln\cos x, \quad \Rightarrow \quad w(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Крок 2. $u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$.

Відповідь: $y(x) = \frac{1}{\cos x}\left[\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C\right]$.

d) $xy' + y = xy^2$.

Це рівняння Бернулі. Застосовуємо метод Бернулі. Відтак,

$$y = u \cdot w \quad \Rightarrow \quad y' = u'w + uw' .$$

$$x(u'w + uw') + uw = xu^2w^2 \quad \Rightarrow \quad xu'w + u\left(xw' + w\right) = xu^2w^2 .$$

Крок 1. $xw' + w = 0, \quad \frac{dw}{w} = -\frac{dx}{x}$.

Інтегруємо $\ln w = -\ln x, \quad w(x) = \frac{1}{x}$.

Крок 2. $u' = \dfrac{u^2}{x}$, $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Інтегруємо $\dfrac{-1}{u} = \ln x + C$, $u(x) = -\dfrac{1}{\ln x + C}$.

Відповідь: $y(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x + C)}$.

Завдання 12

Комплексні числа та дії з ними

Розв'язати квадратне рівняння $az^2 + bz + c = 0$, якщо a, b, c задані таблицею.

Обчислити: $2z_1 + 3iz_2$; $\dfrac{4z_1 + i}{z_2 - i}$; $\sqrt[3]{z_1}$.

$a = 4,\quad b = -24,\quad c = 45$.

Розв'язання

$4z^2 - 24z + 45 = 0$;

$$z_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 4 \cdot 45}}{8} = \frac{24 \pm \sqrt{-144}}{8} = \frac{24 \pm 12i}{8}.$$

$$z_1 = 3 + \frac{3}{2}i,\quad z_2 = 3 - \frac{3}{2}i.$$

а) $2z_1 + 3iz_2 = \left(3 + \dfrac{3}{2}i\right) + 3i\left(3 - \dfrac{3}{2}i\right) = 3 + \dfrac{3}{2}i + 9i - \dfrac{9}{2}i^2 = \left(3 + \dfrac{9}{2}\right) + i\left(\dfrac{3}{2} + 9\right) = \dfrac{15}{2} + \dfrac{21}{2}i$.

б) $\dfrac{4z_1 + i}{z_2 - i} = \dfrac{102}{45} + \dfrac{156}{45}i = \dfrac{34}{15} + \dfrac{52}{15}i$.

в) $\sqrt[3]{z_1}$.

$$z_1 = 3 + \frac{3}{2}i = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right).$$

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5},\quad \phi = arctg\frac{3/2}{3} = arctg0.5 \approx 26^0.$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{45}{9}}\left(\cos 26^0 + i\sin 26^0\right)} = \sqrt[6]{\frac{45}{9}}\left(\cos\frac{26^0 + k\cdot 360^0}{3} + i\sin\frac{26^0 + k\cdot 360^0}{3}\right)\ (k = 0,1,2).$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \begin{cases} \sqrt[6]{\dfrac{45}{9}}(\cos 8^0 + i\sin 8^0) \\ \sqrt[6]{\dfrac{45}{9}}(\cos 128^0 + i\sin 128^0) \\ \sqrt[6]{\dfrac{45}{9}}(\cos 248^0 + i\sin 248^0) \end{cases}.$$

Завдання 13

Практичні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку

У посудину, що містить 10 л води, неперервно надходить розчин зі швидкістю 2 л за хвилину, в кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин перемішується з водою, і суміш з тією ж швидкістю витікає з посудини. Скільки солі буде в посудині через 5 хвилин?

Розв'язання.

Нехай y(t) — кількість солі в посудині в момент часу t. Знайдемо на скільки зміниться кількість солі за проміжок часу від моменту t до моменту $t + \Delta t$.

За одну хвилину надходить 2 л розчину, а за Δt хвилин $2\Delta t$ літрів розчину, що містить 0,3 $2\Delta t$ (або $0.6\Delta t$) кг солі.

З іншого боку, за час Δt з посудини витече $2\Delta t$ літрів розчину. Якщо б концентрація солі за елементарний проміжок часу Δt була незмінною, то витік розчину обсягом $2\Delta t$ літрів міг би містити $0.2\Delta t \cdot y(t)$ кг солі. Але, оскільки концентрація солі за час Δt змінюється на величину $\alpha(\Delta t)$ $\left(\alpha(\Delta t) \to 0, \text{при } \Delta t \to 0\right)$, то обсяг $2\Delta t$ літрів розчину, що витікає, насправді містить $0.2\Delta t\left(y(t) + \alpha(\Delta t)\right)$ кг солі.

Відтак, розчин, що надходить до посудини за час Δt приносить $0.6\Delta t$ кг солі, а розчин, що витікає з посудини , вимиває $0.2\Delta t\left(y(t) + \alpha(\Delta t)\right)$ кг. Приріст кількості солі за цей час $y(t + \Delta t) - y(t)$ і дорівнює різниці знайдених величин

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}6\Delta t - 0.2\Delta t\left(y(t) + \alpha(\Delta t)\right).$$

Поділимо обидві частини рівності на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$.

Оскільки $\alpha(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, то $y'(t) = 0.6 - 0.2y(t)$.

Отримали лінійне диференціальне рівняння $5y' + y = 3$.

Загальний розв’язок його $y(t) = 3 - Ce^{-0.2t}$

Оскільки в початковий момент часу (t = 0) солі в посудині не було, то y(0) = 0.

З початкової умови маємо y(0) =3-C, тобто C=3.

Остаточно, кількість солі у довільний момент $y(t) = 3 - 3e^{-0.2t}$.

Таким чином, через 5 хвилин в посудині буде

$y(5) = 3 - 3e^{-0.2\cdot 5} = 3 - 3/e \approx 1.9$ кг солі.

Завдання 14

Задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною

Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови

$y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

Розв'язання.

Загальний розв'язок є сумою $y(x) = y_0(x) + y^*(x)$, де y_0 - загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 4y' - 12y = 0$, а y^* - частинний розв'язок заданого рівняння.

Для пошуку розв'язку однорідного рівняння складемо відповідне характеристичне рівняння $k^2 + 4k - 12 = 0$. Має два корені: $k_1 = -6, \quad k_2 = 2$. Відтак, $y_0(x) = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$. Тут C_1 і C_2 - довільні сталі. Частинний розв'язок y^* шукаємо методом підбору за виглядом правої частини: $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Знайдемо $y^{*'} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \quad y^{*''} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$.

Підставляємо у вихідне рівняння, і отримуємо тотожність

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) - 12A\cos 2x - 12B\sin 2x = 8\sin 2x$.

Прирівнюємо зліва й справа коефіцієнти при однакових функціях. Буде система

$\begin{cases} -16B - 8A = 8 \\ -16A + 8B = 0 \end{cases}$. Звідси $A = -\frac{1}{5}, \quad B = -\frac{2}{5}$.

Загальний розв'язок рівняння стає таким $y(x) = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{2}{5}\sin 2x$.

Задовольняємо початкові умови і отримаємо систему рівнянь щодо C_1 і C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{5} \\ -6C_1 + 2C_2 = \dfrac{4}{5} \end{cases}.$$ Звідси $C_1 = -\dfrac{1}{20}, \quad C_2 = \dfrac{1}{4}$.

Шуканий розв’язок заданого рівняння виходить таким:

$$y(x) = -\frac{1}{20}e^{-6x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{2}{5}\sin 2x.$$

Завдання 15

Розв’язання ймовірнісних задач з використанням формул Бейєса та повної ймовірності

У складальний цех надходять однакові деталі, які виготовлені у двох різних цехах заводу. Перший цех доставляє 70%, а другий - 30% деталей. При цьому 95% деталей першого цеху вищої якості, а з другого - 90%. Навмання обрана деталь з доставки виявилася вищої якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь: 1) з першого цеху; 2) з другого цеху.

Розв’язання. Позначимо подію A – доставлена деталь є вищої якості. Висуваємо гіпотези: гіпотеза H_1 - деталь із першого цеху; гіпотеза H_2 - деталь із другого цеху. Тоді, апріорні ймовірності гіпотез: $P(H_1) = 0{,}7$, $P(H_2) = 0{,}3$. Умовні ймовірності події A за кожної з гіпотез відповідно дорівнюють: $P(A/H_1) = 0{,}95$, $P(A/H_2) = 0{,}9$. За формулою Бейєса маємо:

імовірність того, що деталь із першого цеху -

$P(H_1/A)= P(H_1)*P(A/H_1) / [P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2)] =$

$= 0{,}7*0{,}95/(0{,}7*0{,}95+0{,}3*0{,}9) = 0{,}71;$

імовірність того, що деталь з другого цеху -

$P(H_2/A)= P(H_2)*P(A/H_2) / [P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2)] =$

$= 0{,}3*0{,}9/(0{,}7*0{,}95+0{,}3*0{,}9) = 0{,}29.$

Завдання 16

Обчислення математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення. Практичні рекомендації.

Постановка задачі

На лісопильному підприємстві обробляються колоди для виготовлення дощок товщиною 25 мм. Однак, через природну неоднорідність деревини, зношеність обладнання та людський фактор фактична товщина дощок може відхилятися від заданого значення. Для оцінки якості розпилу ми вимірюємо товщину дощок у вибірці, обчислюємо математичне сподівання (середнє значення товщини) та стандартне відхилення (показник варіабельності товщини). На основі цих даних ми хочемо:

1. Визначити, чи відповідає середня товщина дощок цільовому значенню (25 мм).
2. Оцінити стабільність процесу розпилу (наскільки сильно варіюється товщина).
3. Прийняти рішення щодо коригування обладнання або сортування дощок.

Розв’язання

Припустимо, ми виміряли товщину 10 дощок з однієї партії, і отримали такі значення (у міліметрах):
X={25.2, 24.8, 26.1, 25.0, 24.7, 25.5, 24.9, 25.3, 26.0, 24.6}.

Цільова товщина дощок — 25 мм, а допустиме відхилення за стандартами якості становить ±1 мм (тобто дошки з товщиною від 24 до 26 мм вважаються якісними).

Крок 1. Обчислення математичного сподівання

Імовірність випадкового обрання кожного з варіантів вибірки є однаковою $p=\frac{1}{n}=\frac{1}{10}$. Тому математичне сподівання μ для вибірки обчислюється як середнє арифметичне виміряних значень:

$$M(X)=\mu=\sum\frac{x_i}{n}=\frac{\sum x_i}{n}$$

де x_i — товщина кожної дошки, n — кількість вимірювань (у нашому випадку n=10).

$$\mu=\frac{25.2+24.8+26.1+25.0+24.7+25.5+24.9+25.3+26.0+24.6}{10}=25.21\text{мм}$$

Висновок: Середня товщина дощок становить 25.21 мм, що дуже близьке до цільового значення 25 мм. Це свідчить про те, що в середньому процес розпилу налаштований правильно. Однак, для оцінки якості цього недостатньо — потрібно перевірити, наскільки варіюється товщина.

Крок 2. Обчислення дисперсії.

$$D=M\left[\left(X-M(X)\right)^2\right] \qquad D=\frac{1}{n^2}\sum\left(x_i-\mu\right)^2$$

Обчислимо різницю між кожним виміряним значенням і середнім μ=25.21:

x_i	x_i- μ	$(x_i$- $\mu)^2$
25.2	25.2-25.21=-0.01	0.0001
24.8	24.8-25.21=-0.41	0.1681
26.1	26.1-25.21=0.89	0.7921
25.0	25.0-25.21=-0.21	0.0441
24.7	24.7-25.21=-0.51	0.2601
25.5	25.5-25.21=0.29	0.0841
24.9	24.9-25.21=-0.31	0.0961
25.3	25.3-25.21=0.09	0.0081
26.0	26.0-25.21=0.79	0.6241
24.6	26.4-25.21=-0.61	0.3721

$\sum(x_i-\mu)^2$=0.0001+0.1681+0.7921+0.0441+0.2601+0.0841+0.0961+0.0081+

+0.6241+0.3721=2.449 .

D=2.449/100.

Крок 3. Обчислення середнього квадратичного (стандартного) відхилення**.**

Підставимо у формулу стандартного відхилення $\sigma = \sqrt{D}$.

$$\sigma = \frac{\sqrt{2.449}}{10} \approx 0.495 \text{ мм.}$$

Висновок: Стандартне відхилення становить 0.495 мм; це означає, що більшість дощок мають товщину, близьку до середнього значення (25.21 мм). Низьке стандартне відхилення (0.495 мм) свідчить про стабільну роботу обладнання. Варіабельність товщини є прийнятною для більшості застосувань пиломатеріалів.

Середня товщина трохи вища за цільову (25 мм), але відхилення на 0.21 мм є незначним і перебуває в межах допуску.

Якщо припустити, що товщина дощок розподілена нормально, то приблизно 68% дощок матимуть товщину в межах μ±σ, тобто від 25.21−0.495=24.715 мм до 25.21+0.495=25.705 мм.

У межах μ±2σ (95% дощок) товщина буде від 25.21−2·0.495=24.22 мм до 25.21+2·0.495=26.2 мм. Оскільки допустима товщина за стандартом якості становить від 24 до 26 мм, більшість дощок відповідає вимогам.

Практичні висновки:

Коригування обладнання: Незначне зміщення середньої товщини (25.21 мм замість 25 мм) може бути виправлене шляхом калібрування пилорами, щоб уникнути накопичення відхилень у великих партіях.

Сортування: Дошки з товщиною, близькою до меж допуску (наприклад, 24.6 мм або 26.1 мм), можна відсортувати для менш вимогливих застосувань.

Використовуючи нормальний розподіл із μ=25.21, σ=0.495, обчислимо ймовірність того, що товщина дошки вийде за межі допуску (за допомогою z-показника або таблиць нормального розподілу).

Для нижньої межі (24 мм):

$$z = \frac{24 - 25.21}{0.495} \approx -2.44 .$$

Ймовірність $P(z<-2.44)\approx 0.0073$ (з таблиці нормального розподілу), тобто 0.73% дощок будуть тоншими за 24 мм.

Для верхньої межі (26 мм):

$$z = \frac{26 - 25.21}{0.495} \approx 1.60 .$$

Ймовірність $P(z>1.60)\approx 0.0548$, тобто 5,48% дощок будуть товщими за 26 мм.

Отже, приблизно 0.73 %+5.48 %=6.21% дощок можуть бути браком, що дозволяє оцінити втрати та скоригувати процес.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

Задану функцію дослідити на неперервність, з'ясувати чи є точки розриву, охарактеризувати їх, побудувати схематичний графік.

1. $$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ 4 - 2x \text{ при } 1 < x < 2{,}5; \\ 2x - 7 \text{ при } 2{,}5 \le x < \infty. \end{cases}.$$

2. $$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 \text{ при } x \le -1; \\ \frac{1}{x} \text{ при } x > -1. \end{cases}.$$

3. $$f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } x \le -1; \\ \frac{2}{x-1} \text{ при } x > -1. \end{cases}.$$

4. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } 0 \le x \le 1; \\ 2 - x \text{ при } 1 < x \le 2. \end{cases}.$$

5. $$f(x) = \frac{x^2 - x^3}{|x-1|} .$$

6. $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & |x|\le \frac{\pi}{4} \\ \frac{4|x|}{\pi}, & |x|>\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

7. $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$.

8. $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x^3}$.

9. $f(x)=\dfrac{1}{3+2^{1/x}}$.

10. $f(x)=\dfrac{1}{3^x-1}$.

11. $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$.

12. $f(x)=5^{\frac{3}{2x+1}}$.

13. $f(x)=3^{\frac{1}{4+2x}}$.

14. $f(x)=2^{\frac{1}{x^2-4}}$.

15. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3-x}}$.

16. $f(x)=\dfrac{1}{4^{1/x}+3}$.

17. $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 \text{ при } x<0; \\ (x-1)^2 \text{ при } 0\le x\le 2; \\ 4-x \text{ при } x>2. \end{cases}$.

18. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$.

19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+3}{3}, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x>0 \end{cases}$.

20. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}, & x\le 0\\ 2-x, & x>0\end{cases}$.

21. $f(x)=\begin{cases}x-x^2, & |x|\le 1\\ 1-x, & |x|>1\end{cases}$.

22. $f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{x^2}{4}, & |x|<-2\\ \dfrac{1}{x+1}, & |x|\ge -2\end{cases}$.

23. $f(x)=\dfrac{1}{2+e^{\frac{1}{3-x}}}$.

24. $f(x)=e^{\frac{2}{1-2x}}$.

25. $f(x)=\dfrac{1}{e+3^{\frac{1}{2-x}}}$.

26. $f(x)=\dfrac{1}{e+2^{1/x}}$.

27. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{|x-1|}$.

28. $f(x)=x+\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{2-x}}}$

29. $f(x)=\dfrac{cosx}{3-2^{\frac{1}{\sin x}}}$.

30. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$.

Завдання 2. Обчислити границі

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{tg^2 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2+5}{3x^5+4x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}$; д) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^6-x+5}{x^6+3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 4x\cdot ctg 5x$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^2+x}{2x^5+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 5x}{tg^2 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2+x-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{6x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{2x^2-11x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x tg 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 4x}{x\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^2+1}{2x^5-5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{3x\sin 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+10x^2-3}{2x^5-x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{3x\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x+\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5+1}{3x^5-2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{\sin 2x}-ctg 2x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3-4x^2+1}{6x^3+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-8x-3}{2x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{2x+11}-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 3x-\sin 3x}{2x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x^2+8x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{3x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{2x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-2x+1}{5x^3+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{7x^2+23x+6}{x^2+8x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(ctg x-\frac{1}{\sin x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}+2}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cdot tgx}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^{2x+1}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x-\sin 2x}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2+2x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{3x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{2\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{7+5x}\right)^{x+1}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x^4-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{x-1}\right)^{x}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{4x+1}\right)^{3x-1}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+9}{7x^2+10x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-72}{x^2-7x+6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{3x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x=0}(1+3\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$

Завдання 3.

Знайти похідну $y'(x)$, якщо функція задана явно, неявно і параметрично:

1.а) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{9x+4}}+\frac{12}{\sqrt[4]{x^3+10}}$; б) $x+\sin 2y-y\cos 2x=10$; в) $\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\sin^2 2t. \end{cases}$

2.а) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;   б) $y \sin x + \cos(x-y) = \cos y$;   в) $\begin{cases} x = \frac{1-t}{t^2}, \\ y = \frac{1+t}{t^2}. \end{cases}$

3.а) $y = e^{1+\ln^2 x}$;   б) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$;   в) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t, \\ y = \ln(t^2+1). \end{cases}$

4.а) $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;   б) $y = x\cos y - \sin x$;   в) $\begin{cases} x = t\sin t + \cos t, \\ y = \sin t + t\cos t. \end{cases}$

5.а) $y = arctg\frac{1}{x}$;   б) $xe^y + ye^x = xy$;   в) $\begin{cases} x = \ln(1+t^3), \\ y = t - arctgt. \end{cases}$

6.а) $y = lg(x - \cos x)$;   б) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$;   в) $\begin{cases} x = 4 - e^{-4t^2}, \\ y = \frac{3}{e^{2t+1}}. \end{cases}$

7.а) $y = x + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$;   б) $e^{-x}\sin y - e^y \cos x = 0$;   в) $\begin{cases} x = \sin^3 4t, \\ y = \frac{1}{2}\cos^3 4t. \end{cases}$

8.а) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;   б) $xy = e^{2x} - e^{-3y}$;   в) $\begin{cases} x = tgt, \\ y = \sin^{-3} t. \end{cases}$

9.а) $y = arctg^2(5x) \cdot \ln(x-4)$;   **б)** $y^2 = 8x + \sin y$;   в) $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$.

10.а) $y = arctg^3(2x) \cdot \ln(x+5)$;   б) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$;   в) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$.

11.а) $y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1)$;   б) $y = x + arctg\, y^2$;   в) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$.

12.а) $y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}$;   б) $\frac{x^2}{5} + \sin y = 2$;   в) $\begin{cases} x = (t+2)^{-1} \\ y = t^2 : (t+2)^2 \end{cases}$.

13.а) $y = tg^4 3x \cdot arctg(7x^2)$;   б) $y^2 = 25x - 4\ln y$;   **в)** $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$.

14.а) $y = 5^{-x^2} \cdot \arcsin(3x^3)$;   б) $arctg\, y = 4x^2 + 5y$;   **в)** $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$.

15.а) $y = arctg^5 x \cdot log_2\,(x-3)$;   б) $y^2 - x = cos\,y$;   **в)** $\begin{cases} x = 2t : \left(1+t^3\right) \\ y = t^2 : \left(t^2-1\right) \end{cases}$.

16.а) $y = log_3\,(x+5) \cdot arc\,cos\,(3x)$;   б) $3x + sin\,y^2 = 5y$;   **в)** $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1} \\ y = (t+1) : \sqrt{t^2-1} \end{cases}$.

17.а) $y = e^{-x} \cdot arcsin^2\,(5x)$;   б) $tgy = 3x + 5y^3$;   **в)** $\begin{cases} x = 4t + 2t^2 \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}$.

18.а) $y = log_4\,(x-1) \cdot arcsin^4\,x$;   б) $xy^2 = ctg\,y$;   **в)** $\begin{cases} x = ln\,t : t \\ y = t\,ln\,t \end{cases}$.

19.а) $y = (x-4)^5 \cdot arctg(3x^2)$;   б) $y = e^y + 4x$;   **в)** $\begin{cases} x = e^t\,cos\,t \\ y = e^t\,sin\,t \end{cases}$.

20.а) $y = ctg^3(4x) \cdot arcctg(2x^3)$;   б) $ln\,y = y/x + 7$;   в) $\begin{cases} x = t^4 \\ y = ln\,t \end{cases}$.

21.а) $y = arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$;   б) $xy^2 - yx^3 = \frac{xy}{x-y}$;   в) $\begin{cases} x = 5^t + t^5, \\ y = 3^t + t^3. \end{cases}$

22.а) $y = tg\left(ln\sqrt{x}\right)$;   б) $x\,ln\,y - y\,ln\,x = 8$;   в) $\begin{cases} x = 1 - e^{3t}, \\ y = \frac{1}{3}(e^{3t} - e^{-3t}). \end{cases}$

23.а) $y = log_3\,sin\,2\,x$;   б) $(x+y)^3 - (y-x)^2 = xy$;   в) $\begin{cases} x = t\,ctgt, \\ y = t^2 arctgt. \end{cases}$

24.а) $y = arctg\sqrt{x} + x$;   б) $2^x + 2^y + (xy)^2 = 0$;   в) $\begin{cases} x = \frac{sin\,t}{t} + t, \\ y = tgt - t. \end{cases}$

25.а) $y = \sqrt[7]{ln\left(x^5 + x\right)} + \frac{1}{7}tgx$;   б) $x^y + y^x = xy$;   в) $\begin{cases} x = t/t{+}3, \\ y = 3/(t^3{-}3). \end{cases}$

26.а) $y = 2^{arctg\;e^x}$;   б) $xy - \frac{x}{y} = \frac{y}{x}$;   в) $\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = e^{-t} - t. \end{cases}$

27.а) $y = 4\,arcsin\frac{\sqrt{x+1}}{2}$;   б) $y^2 - x^2 = arctgy$;   в) $\begin{cases} x = 2t - sin\,2\,t, \\ y = sin^3\,t. \end{cases}$

28.а) $y = \sqrt[3]{(2x-3)(3-x)}$;   б) $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$;   в) $\begin{cases} x = cos\,t/(1{+}cos\,t), \\ y = sin\,t/(1{+}cos\,t). \end{cases}$

29.а) $y = arctg\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;   б) $y = x + x\,sin\,y$;   в) $\begin{cases} x = t\sqrt{1-t^2}, \\ y = arccos\,t. \end{cases}$

30.а) $y = \frac{1}{3} ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}$; б) $x\, tgy - x^2 + y^2 = 4$; в) $\begin{cases} x = ln\, cos\, t\,, \\ y = e^{-\cos t}. \end{cases}$

Завдання 4

Практичні задачі з використанням похідної

1. З круглого бруса радіусом $\boldsymbol{R}$ слід вирізати балку максимальної міцності. Знайти розміри балки, якщо її міцність пропорційна добуткові ширини на квадрат висоти перерізу.

2. Зрошувальний канал має в перерізі рівнобічну трапецію. Бічні сторони трапеції рівні за довжиною основі трапеції і утворюють з нею кут α. Знайти значення кута, при якому канал матиме найбільшу пропускну здатність.

3. Вікно має таку форму: прямокутник, зверху півкруг. Периметр вікна дорівнює $\boldsymbol{a}$. Визначити розміри вікна, яке пропускатиме найбільше світла.

4. Знайти відношення висоти до діаметра конуса заданого об’єму, щоб конус мав мінімальну бічну поверхню.

5. Маємо прямокутний трикутник АСВ. Точка В є на висоті $\boldsymbol{h}$ щодо катета АС, рівного $\boldsymbol{a}$. Знайти висоту, за якої лампочка, вчеплена у т.В, даватиме найбільше освітлення в т. А. (Освітленість $\boldsymbol{J}$ у т.А прямо пропорційна висоті підвісу лампочки й обернено пропорційна кубу віддалі до т.А).

6. Над центром столу радіусом $\boldsymbol{R}$ кріпиться лампочка, яку можна опускати чи піднімати. На якій висоті над столом має бути піднята лампочка, щоб освітленість на краях столу була найбільшою? (Для освітленості є формула $J = \frac{k \sin\varphi}{r^2}$, $\boldsymbol{r}$ – довжина променю до точки падіння; φ - кут нахилу падіння променю).

7. З кола радіусом l вирізають сектор, після чого з решти матеріалу скручують конус. Яким має бути сектор, щоб вийшов конус максимального об’єму?

8. Стовбур дерева завдовжки L має форму зрізаного конуса з діаметрами основ s_1 і s_2 . Необхідно вирізати з цього стовбура балку з прямокутним перерізом, сторони якого відносяться як 3:1, а вісь збігається з віссю стовбура. Якими мають бути розміри балки, щоб її об’єм був найбільшим?

9. Як змінити радіус основи конуса, щоб максимізувати його об’єм?

10. Потрібно знайти оптимальне співвідношення радіуса та висоти конуса щоб він максимальний об'єму?

11. Міцність прямокутної балки пропорційна добутку її ширини на квадрат висоти. Знайти розміри найміцнішої балки, яку можна вирізати з циліндричної колоди діаметром $\boldsymbol{a}$ см.

12. Треба виготовити конічну лійку з твірною, що дорівнює 60 см. Якою має бути висота лійки, щоб об'єм був найбільшим?

13. Якими мають бути розміри циліндричної посудини місткістю 100 л, відкритої зверху, щоб на її виготовлення була потрібна найменша кількість матеріалу?

14. Два джерела світла розміщені на відстані 30м одне від одного. Знайти на прямій, що їх з'єднує, найменш освітлену точку, якщо сили світла джерел відносяться як 27:8 (освітленість точки обернено пропорційна квадратові відстані від точки до джерела).

15. Визначити , за якого значення діаметра D круглого отвору в греблі витрати води Q будуть мати найбільше значення, якщо $Q = cD\sqrt{h - D}$, де ***h*** -глибина занурення нижньої точки отвору, c=const.

16. З круглої колоди діаметром ***D*** слід вирубати прямокутний брус так, щоб його опір поздовжньому стиску був найбільший. Знайти розміри бруса, якщо опір є пропорційний площі його поперечного перерізу.

17. Яким має бути найменший діаметр кругової колоди, щоб із неї можна було виготовити брус, поперечним перерізом якого є правильний трикутник зі стороною 15см?

18. В точках A і B знаходяться джерела світла сили відповідно F1 і F2. Відстань між точками дорівнює ***d***. На відрізку AB знайти найменш освітлену точку M. Зауваження: освітленість точки джерелом світла сили F обернено пропорційна квадрату відстані ***r*** її від джерела світла $E = kF/r^2$, k = const.

19. Потрібно виготовити відкритий циліндричний бак заданого об'єму ***V***. Вартість квадратного метра матеріалу, що йде на виготовлення дна бака, дорівнює p_1 , а стінок - p_2 . Якими мають бути радіус дна ***r*** і висота бака ***h***, щоб витрати на матеріал для його виготовлення були найменшими? (Рекомендується прийняти за аргумент відношення радіуса ***r*** дна бака до його висоти ***h***).

20. Із всіх конусів з даною бічною поверхнею S знайти той, у якого об'єм найбільший.

21. Посудина з вертикальними стінками висотою h , наповнена нев'язкою рідиною, стоїть на горизонтальній площині. Визначити таке місце для отвору, при якому дальність струменя витікання рідини буде найбільшою. Вважати, що швидкість витікання визначається законом Торічеллі для нев'язкої, нестисливої рідини $v = \sqrt{2gx}$, де ***x*** – віддаль отвору від поверхні, ***g*** – прискорення вільного падіння.

22. Канал, ширина якого ***a***, під прямим кутом впадає в інший канал шириною ***b***. Визначити найбільшу довжину балок, які можна сплавляти по цій системі каналів.

23. Полотняний намет об'ємом V має форму прямого конуса. Яким має бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоб на виготовлення намету пішла найменша кількість полотна?

24. Добові витрати на обслуговування катера складаються з постійної частини ***a*** (стоянка в порту), і змінної частини, що пропорційна кубові швидкості руху. Встановити, за якої швидкості v утримання судна буде найекономічнішим.

25. Дві кульки рухаються по сторонах прямого кута у напрямку вершини зі сталими швидкостями v_1 і v_2. У момент початку руху перша кулька була на відстані ***a*** від вершини, а друга куля – на відстані ***b***. Визначити час, коли відстань між кульками буде найменшою.

26. Картина висотою 1,4 м підвішена на стіні так, що її нижній край на 1,8 м вище очей спостерігача. На якій відстані від картини має стояти спостерігач, щоб кут зору був найбільшим?

27. Вікно має форму прямокутника, який зверху закінчується правильним трикутником. Периметр вікна дорівнює 3 м. Якою повинна бути основа трикутника, щоб вікно мало найбільшу площу?

28. Форма поперечного перерізу заповненого водою каналу має вигляд трапеції, бічні сторони і нижня основа якої дорівнюють ***b*** м. Якою повинна бути верхня (більша) основа трапеції для того, щоб пропускна здатність каналу була найбільшою?

29. Знайти радіус основи і висоту конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі з радіусом ***R***.

30. Яким має бути вхідний отвір у вежу прямокутного перерізу завширшки ***d***, щоб можна було внести всередину трубу довжиною ***l***, якщо нижній кінець труби волочиться по землі $(d < l)$?

Завдання 5
Похідна за напрямком і градієнт

Задано: функція $f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ і вектор $\vec{s}(s_x, s_y)$. Обчислити різницю між швидкістю зміни функції у заданому напрямку і швидкістю у напрямку найбільшої зміни.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad M_0(1,2),\ \vec{s}\,(3,4)$.

2. $f(x,y)=xe^{y}, \qquad M_0(1,0),\ \vec{s}\,(1,1)$.

3. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2), \quad M_0(1,-1),\ \vec{s}\ (1,3\sqrt{3})$.

4. $f(x,y)=x^2-y^2, \qquad M_0(2,1),\ \vec{s}\,(-3,4)$.

5. $f(x,y)=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), \qquad M_0(1,1),\ \vec{s}\ (-1,1)$.

6. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad M_0(3,4),\ \vec{s}\ (0,1)$.

7. $f(x,y)=x^3+y^3, \qquad M_0(-1,2),\ \vec{s}\,(1,3)$.

8. $f(x,y)=e^{xy}, \qquad M_0(1,0),\ \vec{s}\ (1,3\sqrt{3})$.

9. $f(x,y)=x\cos(y), \qquad M_0(0,\pi),\ \vec{s}\ (2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

10. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad M_0(1,1),\ \vec{s}\ (1,1)$.

11. $f(x,y)=x^2y+y, \qquad M_0(1,1),\ \vec{s}\,(1,0)$.

12. $f(x,y)=\sin(xy), \qquad M_0(\pi,1),\ \vec{s}\ (1,1)$.

13. $f(x,y)=e^{x+y}, \qquad M_0(0,0),\ \vec{s}\,(-1,1)$.

14. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}, \qquad M_0(4,1),\ \vec{s}\ (2,-1)$.

15. $f(x,y)=\dfrac{x}{y+1}, \qquad M_0(1,1),\ \vec{s}\,(1,2)$.

16. $f(x,y)=\ln(x+y+1), \qquad M_0(0,0),\ \vec{s}(1,1)$.

17. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \qquad M_0(1,1),\ \vec{s}\ (-1,0)$.

18. $f(x,y)=\cos(x)\sin(y), \qquad M_0(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}),\ \ \vec{s}\,(1,-1)$.

19. $f(x,y)=x^2+y^3, \qquad M_0(2,-1),\ \ \vec{s}\,(3,4)$.

20. $f(x,y)=x^3-2x^2y+6, \qquad M_0(-1,1),\ \ \vec{s}\ (4,1)$.

21. $f(x,y)=\sin(x)+\cos(y), \qquad M_0(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}),\ \ \vec{s}\,(1,0)$.

22. $f(x,y)=x^2y^2, \qquad M_0(1,2),\ \ \vec{s}\,(-2,1)$.

23. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$, $M_0(0,1)$, $\vec{s}\,(1,-1)$.

24. $f(x,y)=x\sin(y)$, $M_0(1,\dfrac{\pi}{2})$, $\vec{s}\,(0,1)$.

25. $f(x,y)=e^{x^2-y}$, $M_0(0,0)$, $\vec{s}\,(1,1)$.

26. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$, $M_0(3,1)$, $\vec{s}\,(-1,2)$.

27. $f(x,y)=tg(xy)$, $M_0(1,1)$, $\vec{s}\,(1,0)$.

28. $f(x,y)=\ln\left(5x^2+4y^2\right)$, $M_0(1,1)$, $\vec{s}\,(2,-1)$.

29. $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $M_0(1,0)$, $\vec{s}\,(0,1)$.

30. $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2}$, $M_0(1,1)$, $\vec{s}\,(1,-1)$.

Завдання 6

Метод найменших квадратів

Для значень x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 задано відповідні значення y_i, $(i=1,\cdots,5)$. Потрібно за цими даними знайти методом найменших квадратів рівняння лінійної залежності $y=ax+b$. Показати експериментальні дані та шукану лінію на рисунку.

1.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.89	3.62	4.99	6.48	9.25

2.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.12	3.59	4.41	6.75	9.02

3.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.98	2.89	4.51	7.49	9.11

4.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.63	2.77	5.25	6.37	9.72

5.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.17	2.83	5.01	6.48	9.52

6.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.98	2.68	5.03	6.88	9.22

7.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.07	3.17	5.01	6.83	8.93

8.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.97	3.03	5.13	7.23	8.97

9.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.06	2.94	4.84	6.92	9.05

10.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.76	2.66	5.24	7.34	8.96

11.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.39	2.42	2.35	3.32	3.37

12.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.62	1.81	2.41	3.16	4.02

13.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.19	1.89	2.59	3.12	3.39

14.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.73	2.12	2.27	2.87	3.52

15.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.67	1.83	2.77	2.68	3.39

16.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.48	1.68	2.53	2.88	3.72

17.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.57	2.17	2.51	2.83	3.43

18.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.47	2.03	2.63	3.23	3.47

19.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.56	1.94	2.34	2.92	3.55

20.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.26	1.66	2.74	3.34	3.46

21.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.39	2.42	3.35	5.32	6.57

22.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.62	1.81	3.41	5.16	7.02

23.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.19	1.84	3.59	5.12	6.39

24.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.73	2.12	3.27	4.87	6.52

25.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.67	1.83	3.77	4.68	6.39

26.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.48	1.68	3.53	4.88	6.72

27.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.57	2.17	3.51	4.83	6.43

28.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.47	2.03	3.63	5.23	6.47

29.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.56	1.94	3.34	4.92	6.55

30.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0.26	1.66	3.74	5.34	6.46

Завдання 7

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність

1. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$ $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

2. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2+3x}$ $\int\limits_{0}^{1/e}\frac{dx}{x\ln x}$;

3. $\int\limits_{9}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$ $\int\limits_{0}^{\pi/2}\mathrm{tg}x dx$;

4. $\int\limits_{5}^{\infty}\frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2}$ $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{2/3}}$;

5. $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$ $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\sin 8x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

6. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x-1}}$.

7. $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x}dx$ $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$

8. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$ $\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x\ln x}$

9. $\int\limits_{0}^{\infty}3^{-x}dx$ $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

10. $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}\, x dx$.

11. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{2x^2+1}$ $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

12. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$.

13. $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

15. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$ $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$.

16. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

17. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}$ $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$.

18. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+3}$ $\int\limits_{-3}^{2}\frac{dx}{(x+3)^2}$.

19. $\int\limits_{0}^{\infty}6^{-x}dx$ $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}$.

20. $\int\limits_{3}^{\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$ $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

21. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$

22. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+3)}$ $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

23. $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{dx}{x^2+3x+2}$ $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$

24. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$ $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{ln(3x-1)}{3x-1}dx$

25. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$ $\int\limits_{0,25}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}$

26. $\int\limits_{0}^{\infty} 4^{-x}dx$ $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{ln2\cdot dx}{(1-x)\cdot ln^2(1-x)}$

27. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$ $\int\limits_{0}^{2/3} \frac{\sqrt[3]{ln(2-3x)}}{2-3x}dx$

28. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{1-x^4}dx$

29. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x}dx$ $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

30. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+5x+6}$ $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$

Завдання 8

Практичні задачі з використанням визначеного інтеграла.

1. Обчислити силу тиску води на греблю, яка має форму рівнобічної трапеції, верхня основа якої $a = 6.4$ м , нижня $b = 4.2$ м , а висота $H = 3$ м

2. Циліндричний контейнер наповнений ртуттю. Знайти силу тиску ртуті на бічні стінки контейнера, якщо його висота 0,1 м , а радіус основи 0,04 м . Густина ртуті $\rho = 13600 \frac{\text{кг}}{м^3}$.

3. Трикутник з основою 9 см і висотою 6 см занурений у воду вершиною догори так, що його основа паралельна вільній поверхні води, а вершина втоплена на 4 см. Визначити силу тиску води на трикутник.

4. Знайти силу тиску води на вертикальну прямокутну пластину з основою 30 м, висотою 10 м, за умови, що верхній кінець пластини є на рівні води.

5. Знайти силу тиску води на стінки акваріума завдовжки 30 см і висотою 20 см.

6. У воду вертикально занурено прямокутну пластину. Горизонтальна сторона рівна 1 м, вертикальна - 2 м. Вертикальна сторона занурена на глибину 0,5 м. Знайти силу тиску води на пластину.

7. Горизонтально розміщена циліндрична цистерна наповнена до половини гасом. Визначити силу тиску на бічні стінки цистерни, якщо радіус дна цистерни 2 м, густина гасу $\rho = 0{,}8\,\frac{\text{г}}{см^3}$.

8. Знайти силу тиску бензину, що залитий в циліндричну цистерну висотою 3,5 м, радіусом 1,5 м, на стінки, якщо густина бензину $\rho = 900\,\frac{\text{кг}}{м^3}$.

Обчислити роботу, яку необхідно витратити на викачування води з певної форми резервуара. Густина води дорівнює 9,81 $кН/м^3$. *<u>Для</u> <u>свого</u> <u>варіанта</u>*

<u>оберіть</u> <u>форму:</u>

9. Форма резервуара - правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 2 м, а висота – 5 м.

10. Форма резервуара- правильна чотирикутна піраміда, яка обернена вершиною вниз. Сторона основи піраміди дорівнює 2 м, висота – 6 м.

11. Форма резервуара- казан, який має форму сферичного сегмента, висота якого дорівнює 1,5 м., а радіус – 1 м.

12. Форма резервуара -пів циліндр, радіус основи якого дорівнює 1 м, довжина – 5 м.

13. Форма резервуара - зрізаний конус, в якого радіус верхньої основи дорівнює 1 м, нижньої – 2 м, висота – 3 м.

14. Форма резервуара - жолоб, перпендикулярний перетин якого є парабола, довжина жолоба – 5 м, ширина – 4 м, глибина – 4 м.

15. Форма резервуара - циліндрична цистерна, радіус основи якої дорівнює 1 м, довжина–5 м.

16. Форма резервуара - правильна трикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 2 м, а висота – 6 м.

17. Форма резервуара - правильна трикутна піраміда, яка обернена вершиною до низу. Сторона основи піраміди дорівнює 4 м, висота – 6 м.

18. Форма резервуара - конус, обернений вершиною до низу, радіус основи якого дорівнює 3 м, висота – 5 м.

19. Форма резервуара - зрізаний конус, в якого радіус верхньої основи дорівнює 3 м, нижньої – 1 м, висота – 3 м.

20. Форма резервуара - конус з радіусом основи 2 м і висотою – 5 м.

21. Форма резервуара - правильна зрізана чотирикутна піраміда, в якої сторона верхньої основи дорівнює 8 м, нижньої – 4 м, висота – 2 м

22. Форма резервуара - параболоїд обертання, радіус основи якого дорівнює 2 м, глибина – 4 м.

23. Форма резервуара - половина еліпсоїда обертання, радіус основи якого дорівнює 1 м, глибина – 2 м.

Обчислити роботу, яку необхідно витратити на подолання сили тяжіння при будівництві споруди певної форми з матеріалу, густина якого $\rho = 24\,\frac{\text{кН}}{м^3}$ *Оберіть форму споруди для свого варіанта:*

24. Форма споруди - правильна зрізана чотирикутна піраміда, у якої сторона верхньої основи дорівнює 2 м, нижньої – 4 м, висота – 2 м.

25. Форма споруди - правильна шестикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 1 м, а висота 2 м.

26. Форма споруди - правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 2 м, а висота 4 м

27. Форма споруди - правильна шестикутна піраміда, у якої сторона верхньої основи дорівнює 1 м, нижньої – 2 м, висота – 2 м

28. Форма споруди - правильна трикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 3 м, висота – 6 м.

29. Форма споруди - конус, радіус основи якого дорівнює 2 м, а висота – 3 м.

30. Форма споруди - зрізаний конус, в якого радіус верхньої основи дорівнює 1 м, нижньої – 2 м, висота – 2 м.

Завдання 9

Дослідити збіжність знакосталого ряду а) за ознакою Даламбера або порівняльною; б) за інтегральною ознакою Коші; в) за кореневою ознакою:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, ln^2\, (n+1)}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2+4n+n^2}}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+5}\right)^{n}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$. б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\, ln\, n\, lnln\, n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$. б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\, ln^3\, n}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n^2}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2n+1}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+1}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n!}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{3n^4+5n-2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{5^n}$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+3^n}{21^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+5)\, ln^2\,(10n+5)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\, ln\,(n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n n!}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+8)\, ln^3\,(3n+8)}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n^2)^n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(ln\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{3n+1}\right)^{2n}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^2-2n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^n}}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\, ln^3\,(3n+4)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n\cdot(n+3)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\, ln\,(3n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}sin^n\frac{n}{2n}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}ln\frac{n+1}{n-1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\, ln^7\, n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(ln\, n)^n}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln\,(n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$. в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4\cdot n!}$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\ln n)\cdot(\ln\ln n)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\sqrt[3]{n}}\right)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5n-2}\right)^{2n}$.

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{3}{n+1}\right)$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$.

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2)tg^2\frac{\pi}{2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{5^n}$.

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{arctg\, n}}{n^2+1}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)}$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n-1}-\sin\frac{1}{n+1}\right)$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$.

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos n}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$.

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(1+\ln^4 n)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{8^n}$.

Завдання 10.

Збіжність знакозмінних числових рядів

Щоб перемножити два знакозмінних ряди необхідно, щоб вони були збіжні, причому один з них абсолютно (теорема Мертенса). Дано два знакозмінні ряди а) і б). Встановити, чи вдасться їх гарантовано перемножити. Відповідь обґрунтувати.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)3^n}$ б) $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\frac{4}{19}+\dots$

2. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ б) $2-\frac{4}{2!}+\frac{6}{3!}-\frac{8}{4!}+\dots$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$ б) $1-\frac{4}{2!}+\frac{9}{3!}-\frac{16}{4!}+\dots$

4. а) $\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\frac{\boldsymbol{(-1)^n}}{\sqrt[4]{\boldsymbol{n^5}}}$ **б)** $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\dots$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)n}$ **б)** $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\frac{9}{27}-\frac{16}{81}+\dots$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{3n-1}$ **б)** $0,6-0,51+0,501-0,5001\dots$

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot\sqrt{n}}$ **б)** $\frac{1}{1+1}-\frac{4}{1+4}+\frac{9}{1+9}+\dots$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{5n(n+1)}$ **б)** $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots$

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(n+5)}{3^n}$ **б)** $1-\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{4}{4!}+\dots$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+7)^n}$ **б)** $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^4-\left(\frac{4}{9}\right)^6+\dots$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$ **б)** $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-.\frac{10}{11}+..$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$ б) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots$

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$ б) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+..$

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$ б) $1-\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\dots$

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}$ б) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\dots$

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{3^n}$ б) $\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot9}+\frac{1}{4\cdot27}-\dots$

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{n^3}$ б) $1-\frac{1}{16}+\frac{1}{81}-\frac{1}{256}+\dots$

18. а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n(ln\,n)^2}$ б) $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{17}}-\cdots$

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{12^n}$ б) $1-\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\dots$

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!}$ б) $-4+\frac{5}{\sqrt{32}}-\frac{6}{\sqrt{343}}+\frac{7}{\sqrt{1024}}-\cdots$

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ б) $\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1}{3\cdot16}+\frac{1}{4\cdot64}-\frac{1}{5\cdot256}+\cdots$

22. а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\,ln\,n}$ б) $-2+\frac{3}{\sqrt{8}}-\frac{4}{\sqrt{27}}+\frac{5}{\sqrt{64}}-\cdots$

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^n}{2n+2}$ б) $-\frac{4}{6}+\frac{5}{8}-\frac{6}{10}+\frac{7}{12}-\cdots$

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{(n+1)^3}}$ б) $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\frac{64}{16}+\cdots$

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{(2n-1)^n}$ б) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{n}{n+1}$; б) $\frac{1}{3}-\frac{1}{25}+\frac{1}{343}-\frac{1}{6561}+\cdots$

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$; б) $\frac{7}{2}+\frac{3}{4}-\frac{25}{8}-\frac{49}{16}+\cdots$

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$; б) $\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\frac{\ln 5}{5}+\cdots$

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(2n+1)5^n}$ б) $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$

Завдання 11

Знайти загальні розв’язки диференціальних рівнянь першого порядку:

1	$(y-x^2y)dy+(y^2x+x)dx=0$. $(y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0$. $y'-\frac{y}{x+2}=x(x+2)$. $xy'+y=xy^2$.	16	$xy\,dx+(x+1)dy=0$. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. $xy'+y=y^2\ln x$.
2	$(1+2y)x\,dx+(1+x^2)dy=0$. $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$. $y'-\frac{y}{x}=x^2$. $2(y'+xy)=(x-1)e^xy^2$.	17	$\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$. $xy'-y=xctg\frac{y}{x}$. $y'-\frac{y}{x+2}x^2+2x$. $y'+xy=(x-1)e^xy^2$.
3	$(1+y^2)dx-xy\,dy=0$. $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$. $y'+3x^2y=x^2e^{-x^3}$. $y'=2\sqrt{y}\ln x$.	18	$(xy-x)^2dy=y(x-1)dx$. $y-xy'=x\cos^2\frac{y}{x}$. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{2}{x^2}$. $y'+2xy=2x^3y^3$.
4	$(2x+1)dy+y^2dx=0$. $y'=\frac{x+2y}{2x-y}$. $xy'+y=\frac{\ln x}{x}$. $y'-y=2xy^2$.	19	$(1+x^3)y^3dx=(y^2-1)x^3dy$. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$. $y'-4xy=-4x^3$. $x(3-y^2)y'=(x^2+3)y$.

5	$e^y(1+x^2)$ dy-2x $(1+e^y)$ dx=0 $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$ $y' - \frac{3y}{x} = \frac{x+1}{x}.$ $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2.$	20	$(1+y^2)dx = (y+yx^2)dy$. $y^2 + x^2y' = xyy'.$ $y' - yctgx = 2x\sin x.$ $2x^2y' = y^5.$
6	$ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0.$ $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$ $y' - \frac{y}{x} = x\cos 3x.$ $4y' + x^3y = (x^3+8)e^{-2x}y^2.$	21	$(xy^3+x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$. $xy' - xctg\frac{y}{x} = y - x\sin\frac{y}{x}.$ $y' + 2xy = -2x^3.$ $(x+1)(y-2)y' = xy^2.$
7	sin$x$ sin$y$ dx + cos$x$ cosy dy =0 $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$ $y' - y = x + 1.$ $4y' + x^3y = (x^3+8)e^{-2x}y^2.$	22	$(x+xy^2)dy + ydx = y^2dx$. x(lnx-ln$y$) dy-ydx=0. $y' + ytgx = \cos^2 x.$ $x(y^2+1)y' = x^3+5.$
8	$y\sin\frac{x}{2}dx - \cos\frac{x}{2}dy = 0.$ $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$ $y' - ytgx = \frac{1}{\cos^2 x}.$ $xy' + y = xy^2$	23	$(x^2+x)ydx + (y^2+1)dy = 0$. $xy' - y + xtg\frac{y}{x} = 0.$ $y\ln y + xy' = 0.$ $(x^2+3)y' + xy^2 = 0.$
9	$sec^2x\, tg\, y\, dx + sec^2 y\, tg\, x\, dy = 0$ $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y.$ $xy' - \frac{y}{x+1} = x.$ $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3.$	24	$(y^2x + y^2)dy + xdx = 0$ y-x$y' = x\cos e c\frac{y}{x}.$ $y' + xy = -x^3.$ $(2+x)y^3y' = x.$
10	$(e^x+8)dy - ye^xdx = 0.$ $y' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x}.$ $xy' + y = e^{2x}$. $y' + y = xy^2.$	25	$e^x \cdot tgydx = (1-e^x)\sec^2 ydy$. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y.$ $y' + \frac{y}{x} = 3x.$ $2x^2y' = y^5.$
11	$x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0.$ $y' = \frac{x+y}{x-y}.$ $y' - \frac{12y}{x+1} = e^x(x+1)^{12}.$ $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3.$	26	$ctgx \cdot \cos^2 ydx + \sin^2 x \cdot tgydy = 0$. $(1+e^{x/y})$ dx+ $e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$ dy=0. $(3+e^x)yy' = e^x.$ $(2x^2+5)y' = xy^3.$
12	$x(5+y^2)dx + y(4+x^2)dy = 0.$ $xy' - y = x2^{-\frac{y}{x}}.$ $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}.$ $y' + y = xy^2.$	27	$2^{x^2+y}dy + xdx = 0$. $y' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \frac{y}{x}.$ $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}.$ $3xy' + 5y = (4x-5)y^4.$

13	$(x^2+1)e^y dy - 2x(1+e^y)dx = 0$ $xy' = y + xe^{y/x}$. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. $y' + y = xy^2$.	28	$3e^x \sin y dx + (1 - e^x)\cos y dy = 0$. $xy^2 dy = (x^3 + y^3)$ dx. $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2$. $y' + \frac{2}{x} y = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
14	$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$. $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$. $y' - 4xy = - 4x^3$. $2(xy' + y) = y^2 \ln x$.	29	$\sin y \cos xdy - \cos y \sin dx = 0$ $\sqrt{y^2 + 1dx} = xydy$. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$. $y' + 2y - y^2 = 0$.
15	$xdx - ydy = yx^2 dy - xy^2 dx$. $(x^2 - y^2)$ dx + 5xydy = 0. x-y=(x + 3y)y'. $y' - y = y^2 x$.	30	$(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$. $x (x + 2y) dx + (x^2-y^2) dy = 0$. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$. $(2 + x)y^3 y' = x$.

Завдання 12

Комплексні числа та дії з ними

Розв’язати квадратне рівняння $az^2 + bz + c = 0$, якщо a , b, c задані таблицею.

Знайдені розв’язки z_1 і z_2 записати у тригонометричній формі. Обчислити:

$2z_1 + 3iz_2$; $\frac{4z_1 + i}{z_2 - i}$; $\sqrt[3]{z_1}$.

B	a	b	c
1	4	-4	5
2	9	12	12
3	8	-20	17
4	5	6	2
5	36	-48	25
6	49	14	10
7	4	-16	25
8	9	18	58
9	16	-40	29
10	25	20	29
11	36	-36	25
12	49	70	26
13	4	-24	45
14	9	24	65
15	8	-28	65

B	a	b	c
16	25	20	53
17	18	-18	17
18	49	56	25
19	4	-4	17
20	9	30	74
21	16	-40	29
22	5	14	10
23	18	30	17
24	49	-28	13
25	2	-14	25
26	9	48	89
27	16	-24	34
28	6	16	13
29	36	-48	25
30	49	84	40

Завдання 13

Практичні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку

1. Посудина об'ємом 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину за 1 с надходить 0,1 л азоту, неперервно перемішується з повітрям, і, одночасно, витікає така ж кількість суміші. За який час в посудині буде 99% азоту?

2. Посудина містить 100 л розчину, і в ньому 10 кг солі. У посудину неперервно надходить вода зі швидкістю 5 л/хв, яка перемішується з розчином. З тією ж швидкістю з посудини витікає суміш. Скільки солі залишиться в посудині через годину?

3. Кімната має об'єм 200 $м^2$. У повітрі кімнати міститься 0,15% вуглекислого газу CO_2. Вентилятор подає в кімнату повітря зі швидкістю $20 м^3 / хв$, і у ньому 0,04% CO_2. За який час кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться втричі?

4. Температура витягнутого з печі хліба за 20 хв знизилась зі 100° до 60°. Температура повітря 25°. За який час від початку остигання температура хліба знизиться до 30°?

5. Радіоактивна речовина, розпадаючись, за 30 днів втратила 50% початкової кількості. За який час залишиться 1% початкового об'єму?

6. Згідно з дослідами за рік з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. За скільки років розпадеться половина існуючої кількості радію?

7. Циліндричний бак розташований вертикально і має отвір у дні. Половина води з повного баку витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?

8. Лійка має форму конуса радіусом 6 см і висотою 10 см, повернутого вершиною вниз. За який час витече вся вода з лійки крізь круглий отвір діаметром 0,5 см, зроблений у вершині конуса?

9. У прямокутний бак розміром $60 \times 75 см$ і висотою 80 см за секунду надходить 1,8 л води. У дні є отвір площею $2,5 см^2$. За який час наповниться бак?

10. Населення Землі у 1970 р. становило 3600 млн. чол., а річний приріст населення - 60 млн. чол. Визначити, якою буде кількість населення у 2030 р.

11. У посудині зберігається 100 л розчину, що містить 10 кг солі. В посудину за хвилину надходить 5 л води, а суміш з тією ж швидкістю переливається в іншу 100-літрову посудину, наповнену чистою водою.

Надлишок рідини з неї виливається. В який момент часу кількість солі в другій посудині буде найбільша? Чому вона дорівнює?

12. За проміжок часу Δt ($\Delta t \to 0$) з 1 г радію іде під радіоактивний розпад 0,00044 Δt грамів, унаслідок чого утворюється 0,00043 Δt грамів радону. З кожного граму радону. Радон теж розпадається, і за проміжок часу Δt розпадеться 70 Δt грамів. На початку досліду мали деяку кількість x_0 чистого радію. В який момент часу кількість утвореного і такого, що ще не розпався, радону буде найбільша?

13. Скласти рівняння залежності концентрації глюкози в крові від часу t при рівномірному внутрішньовенному введенні глюкози за 60 хв.

14. Із статистики відомо, що кількість новонароджених як і кількість померлих осіб за певний проміжок часу пропорційні до чисельності населення з коефіцієнтами відповідно K_1 і K_2. Знайти формулу, що визначає зміни чисельності населення з часом.

15. Циліндричний резервуар, у дні якого є отвір, заповнений рідиною. Знайти час t_0, за який рідина витече з резервуару, якщо висота стовпа рідини H, радіус циліндра r, площа отвору S.

16. За який час тіло, нагріте до 100 °, охолоне до 25 ° за температури навколишнього середовища 20°, якщо до 60° воно охолоджується за 10 хвилин? (За законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою тіла та температурою повітря).

17. За який час витече вода через отвір площею $0{,}5\,\text{см}^2$ на дні конічної лійки висотою 10 см і кутом при вершині 60^0? Швидкість v витікання води з отвору, що на відстані ***h*** від поверхні, вважати рівною $v = 0.6\sqrt{2gh}$. (g – прискорення тяжіння).

18. Швидкість розпаду радію у кожен момент пропорційна до його кількості. Визначити який відсоток від початкової кількості зазнає розпаду через 200 років, якщо період піврозпаду радію 1590 років.

19. Унаслідок хімічної реакції між речовинами А і В масами а, b утворюється третя речовина С. Встановити залежність маси цієї речовини від часу, якщо швидкість реакції пропорційна добуткові реагуючих мас.

20. Швидкість розмноження бактерій у середовищі пропорційна до їх кількості у даний момент часу. Протягом 5 год їх кількість потроїлася. Знайти залежність кількості бактерій від часу.

21. У початковий момент часу в деякому середовищі перебувало 100 бактерій. Протягом трьох годин їх число подвоїлося. У скільки разів збільшиться кількість бактерій через 9 год.?

22. Температура води у відкритому резервуарі спочатку була 70^0 , за 10 хв вона стала 65^0 . Температура оточуючого середовища 15^0 .Визначити температуру води в резервуарі , якщо минуло 30 хв.

23. Температура води у відкритому резервуарі спочатку була 70^0 , за 10 хв вона стала 65^0 . Температура оточуючого середовища 15^0 . Визначити час, коли температура стане рівною 20^0.

24. Популяція певного виду риб у закритому озері змінюється за логістичним законом Ферхюльста. Початкова кількість риб — 200, максимальна місткість озера — 1000 риб, а швидкість зростання популяції — 0.5 (за рік). Як зміниться популяція через 5 років (вилов не проводиться)?

25. Населення міста становить 50 000 осіб, і щорічний темп зростання населення складає 3%. Запишіть рівняння моделі Мальтуса. Визначте населення міста через 10 років.

26. Популяція зайців в деякому регіоні становить 1200 осіб. Як показує статистика щорічний темп її зростання складає 5%. Запишіть рівняння моделі Мальтуса. Визначити прогнозовану величину популяції через 2 роки.

27. У деякому регіоні популяція ведмедів у даний момент часу сягає 800 осіб. Скласти рівняння і оцінити очікувану чисельність популяції через 2 роки в рамках моделі Ферхюльста . Прийняти максимальну чисельність 2000 осіб, темп росту популяції 0,2 в рік.

28. У деякому регіоні популяція ведмедів у даний момент часу сягає 800 осіб. Оцінити у відсотках зменшення популяціі через 2 роки в рамках моделі Ферхюльста, якщо через погіршення екології темп росту популяції зменшиться від 0,2 в рік до 0,1. Прийняти максимальну чисельність 2000 осіб.

29. Чисельність популяції оленів у заповіднику становила 300 особин. Відомо, що популяція зростає за законом Мальтуса з темпом r=0.05 на рік. Визначити, скільки оленів буде через 8 років.

30. Чисельність популяції оленів у заповіднику становила 300 особин. Відомо, що популяція зростає за законом Мальтуса з темпом r=0.05 на рік. Визначити час, за який популяція подвоїться.

Завдання 14

Задача Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною

1. $3y'' - 4y = x + 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $2y'' - 5y' - 3y = 2e^{-x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$
3. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 8.$

4. $y'' + 16y = 16\sin 2x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$

5. $y'' - 2y' - 3y = \frac{1}{3}e^{-2x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0.$

6. $y'' + y = -x^2 + x - 2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

7. $y'' + 4y = 8\sin 2x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

8. $y'' + 4y = 4x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3.$

9. $y'' + 4y' + 4y = 9e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = \frac{3}{2}.$

10. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 3, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1.$

11. $3y'' + 4y' + 2y = \cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

12. $y'' - 2y' = x^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

13. $y'' + 4y' - 5y = \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

14. $9y'' + y = \sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

15. $y'' - 2y' + 5y = 3 + x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

16. $3y'' + y' - 2y = e^{4x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

17. $y'' + 2y' - 3y = 2x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

18. $y'' + y = \sin 2x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

19. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

20. $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4.$

21. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

22. $y'' + 6y' + 13y = 26x - 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

23. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$

24. $y'' - 2y' + \frac{5}{4}y = \frac{5}{4}\cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{13}.$

25. $y'' + y = \cos 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 1.$

26. $y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

27. $y'' - 4y = 2 - x, \quad y(0) = \frac{11}{2}, y'(0) = \frac{1}{4}.$

28. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

29. $y'' - y' = 9xe^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) =- 5.$

30. $y'' - 3y' - 4y = 17\,sin\,x, \quad y(0) = 4, y'(0) = 0.$

Завдання 15

Розв'язання ймовірнісних задач з використанням формул Бейєса та повної ймовірності.

1. Є дві партії виробів з 12 і 10 штук, причому в кожній партії один виріб бракований. Виріб, узятий навмання з першої партії, перекладено в другу, після чого вибирається навмання виріб із другої партії. Визначити ймовірність того, що він бракований.

2. У кошик, що містить 3 кулі, опущена чорна куля. Яка ймовірність того, що з кошика навмання буде взята чорна куля, якщо всі припущення про початковий склад куль за кольором рівноможливі?

3. З партії, що складається з 4 виробів, взяли навмання один виріб, який виявився небракованим. Будь-яке число бракованих виробів рівноможливе. Яка гіпотеза про кількість бракованих виробів найбільш вірогідна?
4. Перший і другий заводи поставляють порівну однакових деталей, але перший виробляє 90 % стандартних деталей, а другий – 85 %. Навмання взята деталь - стандартна. Яка ймовірність, що вона виготовлена першим заводом?

5. З кошика, що містить 3 білі та чорні кульки, перекладено дві кульки до кошика, у якому 4 білі та 4 чорні кульки. Яка ймовірність того, що з другої кошика після такого перекладення буде взято білу кульку?

6. У двох корзинах баскетбольні та волейбольні м'ячі, причому у першій – 8 баскетбольних і 2 волейбольні, у другій – 6 баскетбольних і 3 волейбольні. З навмання обраної корзини беруть м'яча. Яка ймовірність того, що взяли волейбольний м'яч?

7. У двох корзинах баскетбольні та волейбольні м'ячі, причому у першій – 8 баскетбольних і 2 волейбольні, у другій – 6 баскетбольних і 3 волейбольні. З навмання обраної корзини беруть м'яча. Яка ймовірність того, що м'яч, який виявився баскетбольним, взяли з першої корзини?

8. Два стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу у мішень. Ймовірність влучення першого – 0,8, другого – 0,4. Відомо, що є одне влучення. Знайти ймовірність того, що у мішень влучив перший стрілець.

9. Серед n екзаменаційних білетів є m “щасливих”. Студенти по черзі беруть білет. У кого більша ймовірність взяти “щасливий” білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

10. У першому ящику десять стандартних і дві браковані деталі, у другому відповідно – 12 і 3, у третьому – 14 і 1. З навмання вибраного ящика взяли деталь. Яка ймовірність того, що взяли стандартну деталь.

11. У першому ящику десять стандартних і дві браковані деталі, у другому відповідно – 12 і 3, у третьому – 14 і 1. З навмання вибраного ящика взяли деталь. Яка ймовірність того, що деталь, яка виявилось бракованою, брали з 3-го ящика?

12. Є дві партії виробів: перша партія складається з 12 виробів, серед них 2 бракованих; друга – з 16 виробів, серед яких 3 бракованих. З першої партії навмання береться 5 виробів, і з другої – 4 вироби. Ці 9 виробів перемішують і обирають навмання один виріб. Знайти ймовірність того, що виріб, який виявися якісним, був з першої партії.

13. До крамниці надходить товарна продукція трьох заводів. Обсяги продукції першого, другого та третього заводів відповідно відносяться 2:5:3. Частка браку на першому заводі 2%, на другому 5%, на третьому – 4%. Яка ймовірність того, що куплений у крамниці товар виявився бракованим.

14. До крамниці надходить товарна продукція трьох заводів. Обсяги продукції першого, другого та третього заводів відповідно відносяться 2:5:3. Частка браку на першому заводі 2%, на другому 5%, на третьому – 4%. Яка ймовірність того, що куплений товар, який виявився якісним, виготовили на другому заводі?

15. Імовірність того, що на контроль надходить дефектний виріб, рівна 0,11. Контролер бракує дефектний виріб з імовірністю 0,9; помилково бракує стандартний виріб з імовірністю 0,1. Знайти ймовірність того, що виріб забраковано.

16. Імовірність того, що на контроль надходить дефектний виріб, рівна 0,11. Контролер бракує дефектний виріб з імовірністю 0,9; помилково бракує стандартний виріб з імовірністю 0,1. Знайти ймовірність того, що виріб, який забракували, виявився якісним.

17. Кількість вантажівок на трасі – 20%, а легкових автомобілів – 80%. Ймовірність того, що на АЗС заїде вантажівка, дорівнює 0,4, легковик – 0,5. На АЗС заїхала машина. Яка ймовірність того, що це легкова машина?

18. Є дві партії виробів по 12 і 10 штук, причому в кожній партії один виріб

бракований. Виріб, взятий навмання з першої партії, перекладено в другу, після чого з другої партії навмання вибирають виріб. Визначити ймовірність виймання бракованого виробу із другої партії.

19. Вироби виготовляють два підприємства. У магазин надходить 60% виробів першого підприємства й 40% - другого. Перше підприємство виготовляє 90% виробів без браку, а друге - 80% виробів без браку. Знайти ймовірність того, що навмання куплений виріб виявиться а) без браку; б)з браком.

20. На склад надходить продукція трьох фабрик. Продукція першої фабрики становить 25%, другої- 40%, третьої - 35%. Відомо також, що ймовірність браку для першої фабрики - 4%, для другої - 1% і для третьої -3%. Знайти ймовірність того, що обраний навмання виріб бракований і виготовлений на першій фабриці.

21. На склад надходить продукція трьох фабрик. Продукція першої фабрики становить 25%, другої- 40%, третьої - 35%. Відомо також, що ймовірність браку для першої фабрики - 4%, для другої - 1% і для третьої -3%. Знайти ймовірність того, що обраний навмання виріб є стандартний.

22. Булки, які випікає хлібозавод, мають такий розподіл за вагою: менше 90 г - 5%, більше 110 г - 10%, інші 85% булок мають нормальну масу (90....110 г). З досить великої партії беруть навмання дві булки. Знайти ймовірність того, що одна булка за масою менша норми, а друга – більше норми.

23. Булки, які випікає хлібозавод, мають такий розподіл за вагою: менше 90 г - 5%, більше 110 г - 10%, інші 85% булок мають нормальну масу (90....110 г). З досить великої партії беруть навмання дві булки. Знайти ймовірність того, що обидві булки мають нормальну масу.

24. Мікросхеми виготовляються на 3 заводах. Перший виготовляє 45% їх загальної кількості, другий та третій - відповідно 40% та 15%. Стандартна продукція І заводу складає 70%, II - 80%, III - 81%. В майстерню надходить продукція цих трьох заводів. Яка ймовірність того, що обрана мікросхема виявиться стандартною?

25. В урні лежить кулька невідомого кольору - з однаковою імовірністю біла або чорна. В цю урну поклали білу кульку і після перемішування навмання взяли одну кульку. Вона виявилась білою. Яка імовірність того, що в урні залишилась біла кулька?

26. Три однакові на вигляд урни мають такий склад кульок: в першій - 20 білих; в другій - 10 білих і 10 чорних; в третій – 20 чорних кульок. З

обраної навмання урни беруть навмання кульку, вона виявилась білою. Знайти ймовірність того, що ця кулька взята з першої урни.

27. Є 6 урн з таким складом кульок: 2 урни – 3 білих і 6 чорних (склад A_1); 3 урни - 3 білих і 2 чорних (склад A_2); 1 урна - 4 білих і 1 чорна (склад A_3). Навмання вибирається урна і з неї виймається одна кулька. Знайти ймовірність того, що кулька виявиться білою .

28. Є 10 однакових на вигляд урн, в 9-ти з них знаходяться по 2 білих та по 2 чорних кульки, а в одній - 5 білих і 1 чорна. Із випадково обраної урни взяли кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька взята із урни, в якій було 5 білих кульок, якщо вона теж виявилась білою?

29. Робітник обслуговує 3 верстати, на яких шліфуються однотипні деталі. Імовірність неякісного шліфування на I верстаті дорівнює 0,02, на II - 0,03, на III - 0,09. Відшліфовані деталі складаються в один ящик. Потужність I верстату в 3 рази більша за II, а третього - в 2 рази менша, ніж другого. Знайти імовірність того, що взята навмання з ящика деталь буде неякісно відшліфована.

30. У двох цехах штампуються однакові деталі. Продукція першого цеху допускає 3% браку, другого - 2%. На контроль відібрано 40 деталей з I-го і 50 деталей з II-го цеху. Ці 90 деталей змішані в одну партію, і з неї навмання беруть одну деталь. Яка ймовірність, що перша взята на контроль деталь буде бракованою?

Завдання 16

Практичні задачі з використанням числових характеристик випадкових величин

1. Для будівництва споруди завезли 100 дошок. Ви перевіряєте усю партію і оцінюєте в балах у залежності від кількості сучків на метр за шкалою:

- 0–2 сучки — висока якість (4 бали),
- 3–5 сучків — середня якість (2 бали),
- 5 сучків — низька якість (0 балів).

Огляд партії має стохастичний характер. З’ясувалося, що 60 шт. мають 0–2 сучки (ймовірність = 0.6), 30 шт. мають 3–5 сучків (ймовірність = 0.3), 10 шт. мають > 5 сучків (ймовірність = 0.1).
На підставі математичного сподівання встановити, чи таку деревину можна сміливо використовувати для відповідальних конструкцій.

2. Для виробництва фанери важлива відсутність тріщин. Надійшла перша партія з 90 зразків. Проводиться стохастична оцінка і якість оцінюється в балах:

- Тріщини відсутні — висока якість (5 балів),
- Тріщини < 5 мм — середня якість (3 бали),

- Тріщини > 5 мм — низька якість (1 бал).

Було встановлено, що 45 зразків без тріщин; 27 із тріщинами < 5 мм; 18 із тріщинами > 5 мм.
Обчислити математичне сподівання якості поставок. Зробити практичні висновки.

3.Припустимо, ви оцінюєте деревину для меблевого виробництва, де ключовим показником якості є вміст вологи. Деревина класифікується так:

- Вологість < 10% — висока якість (3 бали),
- Вологість 10–20% — середня якість (2 бали),
- Вологість > 20% — низька якість (1 бал).

Ви взяли 50 зразків із партії. Встановлено: 20 зразків мають вологість < 10% ; 15 зразків — 10–20% ; 15 зразків — > 20% . Оцінка є випадковою величиною. Застосовуючи математичне сподівання визначити оцінку в балах цієї партії. Зробити висновок щодо застосування.

4.Для зовнішніх конструкцій важлива природна стійкість деревини до гниття. Існують такі категорії та відповідні оцінки:

- Висока стійкість (понад 20 років) — 5 балів,
- Середня стійкість (10–20 років) — 3 бали,
- Низька стійкість (< 10 років) — 1 бал.

Випадково обрали 200 зразків. Виявили, що: 80 мають високу стійкість; 70 мають середню; 50 мають низьку. Стійкість є випадковою величиною. Визначити сподівання очікуваної стійкості. Зробити рекомендації щодо застосування.

5.Густина деревини (кг/м³) важлива для суднобудування. Проводиться оцінка випадкової партії за категоріями й присвоюються бали:

- 700 кг/м³ — висока якість (4 бали),
- 500–700 кг/м³ — середня якість (2 бали),
- < 500 кг/м³ — низька якість (0 балів).

Обрано випадково 150 зразків. Виявилося, що: 60 мають густину > 700 кг/м³ ; 75 мають 500–700 кг/м³ ; 15 мають < 500 кг/м³. Визначити математичне сподівання якості для закупки. Зробити рекомендації.

6.У декоративному виробництві важливим є колір деревини (наприклад, для паркету). Є такі категорії і їм присвоєні бали:

- Рівномірний насичений колір — висока якість (4 бали),
- Легкі відхилення в кольорі — середня якість (2 бали),
- Значні плями чи затемнення — низька якість (0 балів).

Надійшла партія дошок, з якої випадково обрали 120 зразків. Аналіз показав, що: 72 мають рівномірний колір; 36 мають легкі відхилення; 12 мають значні дефекти. На підставі математичного сподівання встановити декоративний потенціал партії. Дати практичні рекомендації.

7.Екологи висаджують 120 дерев для відновлення лісу. Ймовірність приживання залежить від двох факторів: погоди та наявності поливу.

- Якщо погода сприятлива (ймовірність 0.7), то при поливі (ймовірність 0.8) дерево приживається з ймовірністю 0.9, а без поливу — з ймовірністю 0.6.
- Якщо погода несприятлива (ймовірність 0.3), то при поливі дерево приживається з ймовірністю 0.5, а без поливу — з ймовірністю 0.2.

Визначити, на яке число дерев, що прижилися, можна сподіватися ? Зробіть практичний висновок.

8.Екологи очищають озеро від нафтових плям. У озері 50 плям, і на успіх очищення впливають два фактори: наявність обладнання та погодні умови.

1. За наявності сучасного обладнання (ймовірність 0.6) і спокійній погоді (ймовірність 0.8) пляма видаляється з ймовірністю 0.95.
2. За наявності обладнання, але при вітряній погоді — з ймовірністю 0.7.
3. Без обладнання (ймовірність 0.4), але при спокійній погоді — з ймовірністю 0.5.
4. Без обладнання і при вітряній погоді — з ймовірністю 0.2.

Визначити математичне сподівання кількості очищених плям. Зробіть практичний висновок.

9.У річці живе 200 риб. Через викид хімікатів їхній порятунок залежить від швидкості реагування екологів і якості води після очищення.

1. Якщо екологи реагують швидко (ймовірність 0.65) і вода очищена добре (ймовірність 0.7), риба виживає з ймовірністю 0.9.
2. Якщо реагування швидке, але вода погано очищена — з ймовірністю 0.4.
3. Якщо реагування повільне (ймовірність 0.35), але вода добре очищена — з ймовірністю 0.6.
4. Якщо реагування повільне і вода погано очищена — з ймовірністю 0.1.

Визначити математичне сподівання кількості врятованих риб. Зробіть практичний висновок.

10.Екологи вводять 80 бджолиних сімей у регіон для запилення рослин. Виживання залежить від наявності квітів і захисту від пестицидів.

1. Якщо квіти є (ймовірність 0.75) і пестициди не застосовуються (ймовірність 0.6), сім’я виживає з ймовірністю 0.85.
2. Якщо квіти є, але пестициди застосовуються — з ймовірністю 0.5.
3. Якщо квітів немає (ймовірність 0.25), але пестициди не застосовуються — з ймовірністю 0.3.
4. Якщо квітів немає і пестициди застосовуються — з ймовірністю 0.1

На яку кількість сімей, що виживуть, можна сподіватися? Зробіть практичний висновок.

11.Екологи висаджують дерева, і кількість укорінених залежить від погоди та поливу. Для одного дерева:

- При сприятливій погоді (ймовірність 0.7) і поливі (ймовірність 0.8) дерево приживається з ймовірністю 0.9.
- При сприятливій погоді без поливу — з ймовірністю 0.6.
- При несприятливій погоді (ймовірність 0.3) і поливі — з ймовірністю 0.5.
- При несприятливій погоді без поливу — з ймовірністю 0.2.

Визначте середнє квадратичне відхилення числа вкорінених дерев, якщо висаджено 50 дерев. Зробіть практичний висновок.

12.Волонтери очищають пляж, де 40 ділянок зі сміттям. Успіх залежить від наявності обладнання та погоди:

- За наявності обладнання (ймовірність 0.6) і ясній погоді (ймовірність 0.7) ділянка очищається з ймовірністю 0.9.
- При обладнанні та дощі — з ймовірністю 0.6.
- Без обладнання (ймовірність 0.4) і ясній погоді — з ймовірністю 0.5.
- Без обладнання та дощі — з ймовірністю 0.3.

Яке середнє квадратичне відхилення кількості очищених ділянок? Зробіть практичний висновок.

13.У заповіднику 60 птахів, і їхній порятунок залежить від швидкості реагування та доступу до укриття:

- При швидкому реагуванні (ймовірність 0.8) і наявності укриття (ймовірність 0.6) птах виживає з ймовірністю 0.95.
- При швидкому реагуванні без укриття — з ймовірністю 0.7.
- При повільному реагуванні (ймовірність 0.2) і укритті — з ймовірністю 0.5.
- При повільному реагуванні без укриття — з ймовірністю 0.2.

Визначте середнє квадратичне відхилення кількості врятованих птахів. Дайте практичне пояснення.

14.На пилорамі кількість відходів (у кг) за день має розподіл: 5 кг (P=0.3), 10 кг (P=0.4), 15 кг (P=0.3). Знайдіть моду і медіану. Зробіть практичний висновок.

15.Дисперсія часу горіння (експоненційний розподіл). Підприємець тестує деревину для дров. Процес має експоненційний розподіл з параметром $\lambda = 0{,}02 хв^{-1}$. Визначити середній час згорання. Зробити висновки.

16.Дисперсія товщини кори. Майстер очищає колоди від кори перед розпилюванням. Товщина кори , що піддається рівномірному розподілові, варіюється від 2 мм до 8 мм. Визначити відхилення товщини відносно середньої. Зробити висновки щодо витрат часу й інструменту.

17.Дисперсія модуля пружності (нормальний розподіл). Інженер тестує дерев'яні балки для перекриттів. За модулем пружності (в ГПа) визначається їх здатність витримувати навантаження. Для перекриттів потрібен модуль > 9 ГПа. За даними: математичне сподівання $M(X) = 10 ГПа$ і стандартне відхилення $\sigma = 1.5 ГПа$ у припущенні нормального розподілу встановити число придатних зразків. Чи буде потрібне сортування?

18.Ефективність каталізатора при гідрокрекінгу**.** Вихід легких фракцій залежить від стану каталізатора та тиску:

- Новий каталізатор (0.8) і високий тиск (0.6) — 40%.
- Новий каталізатор і низький тиск — 35%.
- Зношений каталізатор (0.2) і високий тиск (0.6) — 30%.
- Зношений каталізатор і низький тиск — 25%.
- Яке M(X) відсотка виходу?

19.Вихід легких фракцій (%) залежить від тиску (високий з ймовірністю 0.6) і стану каталізатора (новий з ймовірністю 0.8). При високому тиску та новому каталізаторі —N(40,3), інакше —N(35,2) (нормальний розподіл). Яким вийде математичне сподівання? Висновок.

20.Вихід легких фракцій (%) залежить від тиску (високий з ймовірністю 0.6) і стану каталізатора (новий з ймовірністю 0.8). При високому тиску та новому каталізаторі —N(40,3), інакше —N(35,2). Яке стандартне відхилення σ? Висновок.

21.Об'єм етанолу з 200 кг біомаси залежить від вмісту цукру та температури ферментації. Визначити сподіване число етанолу за умов:

- ❖ Високий цукор (0.7) і оптимальна температура (0.8) — 20 л.
- ❖ Високий цукор і висока температура — 18 л.
- ❖ Низький цукор (0.3) і оптимальна температура (0.8) — 15 л.
- ❖ Низький цукор і висока температура — 12 л.

22. Концентрація етанолу при ферментації**.** Концентрація етанолу (%) залежить від температури (оптимальна з ймовірністю 0.8) і вмісту цукру (високий з ймовірністю 0.7). При оптимальній температурі та високому цукрі —N(20,2), інакше —N(15,1) (нормальний розподіл). Яким вийде математичне сподівання? Які рекомендації?

23.Об'єм синтетичного газу з 100 кг біомаси залежить від вологості сировини та тиску. На який вихід газу можна сподіватися, якщо:

- ❖ Низька вологість (0.7) і високий тиск (0.6) — 50 $м^3$.

- Низька вологість і низький тиск — 45 $м^3$.
- Висока вологість (0.3) і високий тиск (0.6) — 40 $м^3$.
- Висока вологість і низький тиск — 35 $м^3$.

24.Маса аміаку з 1000 $м^3$ сировини залежить від температури та каталізатора. Яке E(X) маси аміаку, якщо:

- Оптимальна температура (0.7) і активний каталізатор (0.6) — 200 кг.
- Оптимальна температура і слабкий каталізатор — 180 кг.
- Висока температура (0.3) і активний каталізатор (0.6) — 170 кг.
- Висока температура і слабкий каталізатор — 150 кг.

Які рекомендації?

25.Вихід аміаку при синтезі. Маса аміаку (кг) із 1000 $м^3$ сировини залежить від температури (оптимальна з ймовірністю 0.7) і каталізатора (активний з ймовірністю 0.6). При оптимальній температурі та активному каталізаторі — N(200,10), інакше —N(170,8) (нормальний розподіл). Яке стандартне відхилення σ?

26. Вихід фосфору в добривах. Вихід фосфору (%) залежить від якості руди (висока з ймовірністю 0.6) і очищення (добре з ймовірністю 0.5). При високій якості та доброму очищенні —N(25,3), інакше —N(18,2) (нормальний розподіл). Яким є E(X)? Які рекомендації?

27.Вихід фосфору (%) залежить від якості руди (висока з ймовірністю 0.6) і очищення (добре з ймовірністю 0.5). При високій якості та доброму очищенні —N(25,3), інакше —N(18,2). Яке стандартне відхилення σ?

28.Час газифікації (години) 100 кг біомаси залежить від вологості (низька з ймовірністю 0.7) і тиску (високий з ймовірністю 0.6). При низькій вологості та високому тиску — розподіл експоненційний із середнім 8 год, інакше — 12 год. Яке M(X)? Які рекомендації?

29.Час газифікації (години) 100 кг біомаси залежить від вологості (низька з ймовірністю 0.7) і тиску (високий з ймовірністю 0.6). При низькій вологості та високому тиску розподіл експоненційний (λ=1/8), інакше — (λ=1/12). Яке стандартне відхилення σ?

30.Час видалення сірки (години) залежить від температури (висока з ймовірністю 0.5) і вмісту сірки (високий з ймовірністю 0.4). При високій температурі та вмістові — розподіл експоненційний (λ=1/10), інакше — (λ=1/15). Яке стандартне відхилення σ ?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Рекомендована література

1. Стадник М.М. Курс вищої математики: Навч. посібник / М.М. Стадник, Б.М. Гнідець, В.М. Онишкевич та ін. - Львів, НЛТУУ, 2012. –559 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
3. Вища математика: Зб. задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.

Допоміжна

1. Лісовська В.П. Вища математика. Практикум: навч. посіб.: у 2 ч. - Ч. 1/ В.П. Лісовська, М.О. Перестюк. - К.: КНЕУ, 2009. - 720 с.

2. Лісовська В.П. Вища математика. Практикум: навч. посіб.: у 2 ч. - Ч. II / В.П. Лісовська, М.О. Перестюк. - К.: КНЕУ, 2012. - 443 с.

3. Вища математика: конспект лекцій у 3 ч / О.І. Оглобліна. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.2. – 111 с.

4. Вища математика: конспект лекцій у 3 ч / О. І. Оглобліна, Л. І. Брацихіна. – Суми: Сумський ДУ, 2011. – Ч.3. – 209 с.

5. Рудавський Ю.К. Збірник задач з теорії ймовірностей. Навч. посібник / Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій та ін.; За ред. Ю.К. Рудавського – Львів: В-во НУ Львівська політехніка, 2000 – 244 с.

6. Вища математика в прикладах та задачах. Частина VI. Випадкові події: Навч. посібник /Укл.: А.В. Павленко, І.В. Пасічник, А.Г. Моня та ін. –Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. – 79 с.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Віртуальне навчальне середовище НЛТУ України. URL: http://vee.nltu.edu.ua/
2. Науково-технічна бібліотека НЛТУ України. URL: https://library.nltu.edu.ua/

ЗМІСТ

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» галузей знань «Виробництво та технології», «Архітектура і будівництво», «Хімічна інженерія та біоінженерія» / Укл.: І.Я. Горбачевський. Львів: ННІ КНІТ НЛТУ України, 2025. 64 с.