

Міністерство освіти і науки України  
Національний лісотехнічний університет України  
Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій  
Кафедра комп'ютерної інженерії, математики і фізики

Горбачевський І.Я.

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки», F6 «Інформаційні системи і технології», F7 «Комп'ютерна інженерія»



Львів – 2026

УДК 51:22 (075.7)

ББК 22.11я73

Укладач: Горбачевський І.Я. – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії, математики і фізики, Національний лісотехнічний університет України.

Рецензенти: Процик Ю.С. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук, Національний лісотехнічний університет України;

Онишкевич В.М. - кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії, математики і фізики, Національний лісотехнічний університет України

Рекомендовано до друку кафедрою комп'ютерної інженерії, математики і фізики НЛТУ України 14.04.2026 р., протокол № 7.

Рекомендовано до видання науково-методичною радою Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій НЛТУ 26.05. 2026 р., протокол № 3.

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки», F6 «Інформаційні системи і технології», F7 «Комп'ютерна інженерія»/ Укл.: І.Я.Горбачевський. Львів: ННІ КНІТ НЛТУ України, 2026. 52 с.

## ВСТУП

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп'ютерні науки», F6 «Інформаційні системи і технології», F7 «Комп'ютерна інженерія» створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки фахівців з програмного забезпечення, що закладено у теоретичному змістові предметної області. У методичних вказівках подано формули та алгоритми, необхідні для розв'язку задач, а також наводиться достатнє число детально розібраних задач з поясненими методами їх розв'язання. Завдання складено так, що студент при незначній допомозі викладача зможе самостійно оволодіти основними методами дисципліни.

Методичні вказівки охоплюють навчальну програму курсу для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями F2, F3, F6, F7 денної та заочної форм навчання і відповідають досягненню компетентностей, закладених в освітньо-професійних програмах спеціальностей.

Курс розрахований на 16 тижнів, відтак «Методичні вказівки» містять 16 розділів з задачами по 30 варіантів. До кожного розділу приводяться типові приклади, які можна використати при самостійному опрацюванні. Наводиться список рекомендованої навчально-методичної літератури. Пропонована методичка може бути корисною для студентів, аспірантів інших спеціальностей з науковим або технічним профілем.

Відповідно до програми «Методичні вказівки» включають такі теми для опрацювання:

**Тема 1.** Визначники їх властивості та обчислення, алгебраїчні доповнення. Визначення матриці. Види матриць. Лінійні операції над матрицями. Множення матриць, мінори матриці

**Тема 2 .** Матрична форма запису системи лінійних рівнянь. Обернена матриця. Метод Крамера, метод Гауса та матричний спосіб розв'язання систем рівнянь. Ранг матриці. Сумісність системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі.

**Тема 3 .** Вектори. Лінійні операції над векторами. Базис. Координати вектора. Декартова прямокутна система координат. Скалярний добуток двох векторів, властивості, обчислення і застосування.

**Тема 4 .** Векторний добуток двох векторів, властивості, обчислення і застосування. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості, обчислення і застосування. Комплексні числа як аналоги векторів. Дії з ними.

**Тема 5.** Поняття про лінію та її рівняння. Перетин двох ліній. Пряма на площині: загальне рівняння, часткові випадки. Види рівнянь прямої і взаємна заміненість. Кут між двома прямими. Віддаль точки до прямої.

**Тема 6.** Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їх геометричні характеристики. Рівняння кривих другого порядку в полярній системі координат.

**Тема 7.** Поверхні в просторі, їх класифікація. Площина. Загальне рівняння площини і його часткові випадки. Кут між двома площинами. Віддаль точки до площини. Пряма в просторі. Кут між прямими. Взаємне розташування прямої та площини. Кут між прямою та площиною.

**Тема 8 .** Поверхні 2-го порядку, їх геометричні характеристики. Власні значення та власні вектори матриці. Квадратична форма і приведення її до канонічного вигляду. Зведення рівнянь кривих і поверхонь другого порядку до канонічної форми через перенесення і поворот системи координат.

*Теми 1, 2, 3 використовуються фахівцями спеціальностей*

**F2** - в комп'ютерній графіці для перетворень (ротація, масштабування) та в ML для нейронних мереж.

**F3** - в алгоритмах III, Data Mining та оптимізації, для аналізу складності алгоритмів.

**F6** - в криптографії для шифрування, через ранг та сумісність оцінюють стійкість криптосистем до атак.

**F7** - для моделювання систем та цифрової обробки сигналів.

*Теми 4, 5, 7 призначені для*

**F2** - комп'ютерної, анімації та моделювання 3D-простору у симуляціях.

**F3** у машинному навчанні для обробки зображень та просторових індексів (R-tree).

**F6** - моделюють траєкторії атак у просторі (наприклад, у візуалізації мережевих вторгнень), кути — для аналізу векторів загроз у симуляціях

**F7** - в GIS-системах для маршрутизації, просторових запитів у базах даних (PostGIS) та аналізу геоданих.

*Тема 8 Знання власних значень забезпечує оптимізацію запитів у багатовимірних базах даних та кластеризацію траєкторій .*

Як правило, в методичних вказівках наводяться нескладні задачі. Автор свідомо уникає задач підвищеної складності, оскільки ставить за мету навчити студента розв'язувати основні задачі, дати деякий мінімум, необхідний для засвоєння вимог вузівської програми.

При написанні праці «Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей F2, F3, F6, F7 використано як авторські, так і задачі й приклади з відомих підручників та посібників, що застосовуються на практичних заняттях зі студентами.

## ЗАВДАННЯ ЗА ТЕМАМИ І ПРИКЛАДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Тема 1.

**Приклад 1.** Обчислити  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ .

► Використовуючи правило трикутника, маємо

$$\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 2 = 13 \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.** Обчислити визначник:  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

► Для обчислення слід розвинути визначник за елементами рядка (стовпця). Як правило, обирають той, що має більшу кількість нулів. Ми можемо обрати або перший рядок, або третій стовпець. Крім того, потрібно для кожного елемента  $a_{ij}$  обраного рядка (стовпця) підрахувати спочатку мінор  $M_{ij}$ , потім алгебраїчне доповнення  $A_{ij}$ . Мінори – це визначники нижчого порядку, які залишаються, якщо викреслити рядок і стовпець з обраним елементом. Алгебраїчне доповнення збігається з мінором, якщо сума номерів рядка і стовпця парна, або відрізняється знаком, коли сума непарна.

Відтак,

$$a_{11} = 2, M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 8, A_{11} = 8;$$

$$a_{12} = 1, M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 88, A_{12} = -88;$$

$$a_{14} = 4, M_{14} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 48, A_{14} = -48;$$

Для обчислення визначника користуємося формулою  $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{14}A_{14}$   
Отримуємо  $\Delta = 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-88) + 4 \cdot (-48) = -264 \quad \blacksquare$

**Приклад 3.** Виконати дії з матрицями

$$\blacktriangleright A \cdot 5 = 5 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+4 & 3+2 \\ 2+9 & 4+6 & 6+3 \\ 3+3 & 6+2 & 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 11 & 10 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Тема 2.

**Приклад 4.** Обчислити обернену матрицю до заданої:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\blacktriangleright$  Обернену матрицю  $A^{-1}$  знаходимо так  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$

$$\text{Визначник матриці } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 12 = -9 \neq 0.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці

$$A_{11} = 3, A_{12} = -6, A_{13} = 3, A_{21} = -4, A_{22} = 2, A_{23} = -1, \\ A_{31} = 2, A_{32} = -1, A_{33} = -4$$

і записуємо матрицю з цих доповнень  $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Далі транспонуємо і одержуємо приєднану матрицю  $\tilde{A}$ :  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Тоді обернена матриця  $A^{-1}$  набуде вигляду:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{6}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \blacksquare$$

**Приклад 5.** Систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими розв'язати а) методом Крамера; б) методом Гауса; в) матричним способом.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x - 7y - z = 8 \end{cases}$$

► *Метод Крамера.*

Треба обчислити головний визначник  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{vmatrix}$  і три допоміжних

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & -7 & -1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Знаходимо:  $\Delta = 33$ ;  $\Delta_1 = 187$ ;  $\Delta_2 = 33$ ;  $\Delta_3 = -121$ .

Відтак,  $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{187}{33} = \frac{17}{3}$ ;  $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1$ ;  $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{121}{33} = -\frac{11}{3}$ .

*Метод Гауса*

x	y	z	b	кс			
1	2	1	4	8			
3	-5	3	1	2			
2	-7	-1	8	2			
1	2	1	4	8	*(-3)	*(-2)	
0	-11	0	-11	-22			:(-11)
0	-11	-3	0	-14			
1	2	1	4	8			
0	1	0	1	2			*11
0	0	-3	11	8			

З таблиці, рухаючись знизу вгору, знаходимо  $x = 17/3$ ,  $y = 1$ ,  $z = -11/3$ .

*Матричний спосіб*

Введемо такі матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Користуючись властивостями матриць, систему рівнянь запишемо як матричне рівняння  $A \cdot X = B$ .

Щоб його розв'язати, потрібно знайти обернену матрицю  $A^{-1}$ . Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці  $A$ :

$$A_{11} = 26, \quad A_{12} = 9, \quad A_{13} = -11, \quad A_{21} = -5, \quad A_{22} = -3, \quad A_{23} = 11$$

$$A_{31} = 11, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = -11.$$

Складемо матрицю  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 26 & -5 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ -11 & 11 & -11 \end{pmatrix}$ . Обернена матриця  $A^{-1}$  вийшла такою:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{26}{33} & -\frac{5}{33} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Щоб розв'язати матричне рівняння, треба виконати дії  $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ .

Але  $A^{-1} \cdot A = E$ , де  $E$  - одинична матриця. Відтак, розв'язок матричного рівняння є таким:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{26}{33} & -\frac{5}{33} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ 1 \\ -\frac{11}{3} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

### ТЕМА 3

**Приклад 6.** Дослідити на сумісність систему рівнянь  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 = 1. \end{cases}$

► Запишемо основну та розширену матриці цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо  $r(A)$  ранг основної матриці  $A$ , для чого обчислимо один з визначників (мінорів) другого (і найвищого) порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0. \text{ Оскільки він не дорівнює нулю, то } r(A) = 2.$$

Встановимо ранг розширеної матриці  $C$ , для чого обчислимо (мінор) визначник третього (найвищого для матриці  $C$ ) порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 10 - 30 + 25 + 2 - 6 = 0.$$

Як бачимо, ранг  $r(C) < 3$ . Очевидно, що  $r(A) = r(C) = 2$ , тобто ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і числу невідомих. Тому система рівнянь є визначеною тобто має єдиний розв'язок.

Для знаходження цього розв'язку розглянемо систему будь-яких двох рівнянь із трьох (але такі, щоб визначник її не дорівнював нулю), зокрема можна взяти ось ці

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Визначник цієї системи, як ми бачили,  $\Delta = -7 \neq 0$ , а тому для її розв'язку можна застосовувати формули Крамера. Скористаємося

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 15 = -14.$$

В результаті отримуємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2. \blacksquare$$

**Приклад 7.** Знайти загальні розв'язки і фундаментальні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

► Маємо однорідну систему. Очевидно, один нульовий тривіальний розв'язок є. Знайдемо нетривіальні.

Запишемо основну матрицю системи і шукатимемо її ранг

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Для визначення рангу матриці використаємо ланцюжок елементарних перетворень

$$R_2 - 2R_1, \quad R_3 - 3R_1, \quad R_4 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - 2R_2, \quad R_4 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ситуація:**  $\text{rang}(A) = 2$ , а кількість невідомих  $n = 5$ . Незалежних невідомих 2, решта виражається через них. Остання матриця відповідає системі рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

З другого рівняння виразимо  $x_3$ , а з першого  $x_1$

$$x_3 = x_4 + 3x_5$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5$$

Якщо прийняти, що  $x_2 = s$ ,  $x_4 = t$ ,  $x_5 = u$ , отримаємо загальний розв'язок у параметричному поданні

$$x_1 = -\frac{2}{3}s - \frac{4}{3}t - \frac{8}{3}u,$$

$$x_2 = s,$$

$$x_3 = t + 3u,$$

$$x_4 = t,$$

$$x_5 = u.$$

Вигідно подати у векторній формі  $x = s \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -8/3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Не зменшуючи загальності, домножимо вектори на 3. Загальний розв'язок системи має такий вигляд:

$$x = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Тут } \alpha, \beta, \gamma - \text{ довільні числа.}$$

А фундаментальна система розв'язків є такою:

$$\{(-2, 3, 0, 0, 0), (-4, 0, 3, 3, 0), (-8, 0, 9, 0, 3)\} \blacksquare$$

**Приклад 8.** Чи вектори

$\vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$ ;  $\vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$ ;  $\vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$ ;  $\vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$  можуть утворювати базис? Виразити небазисні вектори через вектори базису.

► Складемо матрицю з координат заданих векторів

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 35 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 35 \\ 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

З останнього перетворення випливає, що  $\text{rang}(A) = 3$ . Система векторів є лінійно залежною (розмір простору дорівнює чотирьом).

Рядки матриці, що не занулилися, відповідають векторам базису. Тобто  $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  можуть утворювати базис. Знайдемо числа  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  такі, що  $\vec{a}_1 = \alpha_1 \vec{a}_2 + \alpha_2 \vec{a}_3 + \alpha_3 \vec{a}_4$ . Запишемо останню векторну рівність у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 5; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 2; \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = -3; \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \end{cases}$$

розв'язком якої є:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_3 = 0$ . Отже,  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ . ■

В  $n$ -вимірному векторному просторі можна вказати нескінченну кількість базисів. Зв'язок між старим  $\mathbf{e}$ :  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  і новим  $\mathbf{e}'$ :  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$  базисами встановлює матриця переходу  $T$ , стовпчики якої (за означенням) складаються з координат векторів нового базису в старому базисі. Цей зв'язок встановлює матрична рівність  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}T$ , де матриці  $\mathbf{e}'$  і  $\mathbf{e}$  утворені з векторів-стовпців відповідних базисів. Матриця переходу  $T$  завжди квадратна і невинроджена. Для неї завжди існує обернена матриця  $T^{-1}$ . Тому координати вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  у старому базисі і координати того самого вектора  $\vec{x} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  у новому базисі зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**Приклад 9.** Перевірити того, що вектори

$$\mathbf{e}: \vec{e}_1 = (2, 3, 5); \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 2); \quad \vec{e}_3 = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{e}': \vec{e}'_1 = (1, 1, 1); \quad \vec{e}'_2 = (1, 1, -1); \quad \vec{e}'_3 = (2, 1, 2)$$

утворюють відповідно «старий» і «новий» базиси, знайти матрицю переходу від «старого до «нового базису».

► Утворимо матричну рівність, що дає змогу визначити зв'язок між базисами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \Delta(\mathbf{e}) = 1 \neq 0; \quad \Delta(\mathbf{e}') = -2 \neq 0.$$

Обидві системи утворюють базиси, тому що  $\text{rang}(\mathbf{e}) = \text{rang}(\mathbf{e}') = 3$ .

Розв'яжемо останню матричну рівність і знайдемо матрицю переходу

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Приклад 10.** Знайти координати вектора  $\vec{x} = (1, 7, -6)$  у базисі  $\mathbf{e}'$ :  $\vec{e}'_1 = (2, 1, -3)$ ;  $\vec{e}'_2 = (3, 2, -1)$ ;  $\vec{e}'_3 = (-1, 3, 1)$ .

► Якщо про старий базис не сказано в умові задачі, то вважається, що він одиничний, тому матриця переходу до базису  $\mathbf{e}'$  має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \Delta(T) = -25 \neq 0; T^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -11 \\ 10 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -11 \\ 10 & 1 & 7 \\ -5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

У базисі  $\mathbf{e}'$ :  $\vec{x} = (3, -1, 2)$ . ■

#### ТЕМА 4

**Приклад 11.** Паралелограм побудований на векторах  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}$ . Потрібно визначити кут між цими векторами, а також проекцію вектора  $\frac{1}{5}\vec{c}$  на вектор  $\vec{a}$

► Як відомо, діагоналі паралелограма є  $\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})$  та  $\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})$ . Знайдемо ці вектори:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + (3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}) = 5\vec{j} - 5\vec{k};$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (0; 5; -5);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) - (3\vec{j} - \vec{i} - 4\vec{k}) = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k};$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (2; -1; 3).$$

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться через скалярний добуток і довжини векторів:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{c} \wedge \vec{d}) &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + (-5) \cdot 3}{\sqrt{5^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-5 - 15}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-20}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}} = \\ &= -\frac{20}{10\sqrt{7}} = -\frac{2}{\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}; \end{aligned}$$

$$\cos\left(\widehat{c, d}\right) = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) \approx 139,11^\circ.$$

Позначимо  $\bar{g} = \frac{1}{5}\bar{c}$      $\bar{g} = (0; 1; -1)$

$$\text{np}_a \bar{g} = \frac{\bar{g} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1)(-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \blacksquare$$

**Приклад 12. а)** Знайти площу паралелограма, діагоналями якого є вектори  $2\bar{m} - \bar{n}$  і  $4\bar{m} - 5\bar{n}$ , де  $\bar{m}$  і  $\bar{n}$  — одиничні вектори, а кут між ними дорівнює  $45^\circ$ .

► Позначимо через  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  сторони паралелограма, тоді  $\bar{a} + \bar{b} = 2\bar{m} - \bar{n}$ ,  $\bar{a} - \bar{b} = 4\bar{m} - 5\bar{n}$ , звідки  $\bar{a} = 3\bar{m} - 3\bar{n}$ ;  $\bar{b} = -\bar{m} + 2\bar{n}$ . Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку  $\bar{a} \times \bar{b}$ .

Отже,  $S = |(3\bar{m} - 3\bar{n}) \times (-\bar{m} + 2\bar{n})| = 3|\bar{m} \times \bar{n}| = 3 \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . ■

**б)** Знайти площу і висоту  $BD$  трикутника, вершинами якого є:  $A(1; -2; 8)$ ;  $B(0; 0; 4)$ ;  $C(6; 2; 0)$ .

► Знайдемо вектори  $\overline{AB} = (-1; 2; -4)$  і  $\overline{AC} = (5; 4; -8)$ . Модуль їх векторного добутку буде дорівнювати подвоєній площі трикутника:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}; \text{ звідки } s = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = 7\sqrt{5}.$$

Знайдемо висоту трикутника:  $|\overline{AC}| = \sqrt{105}$ ;  $h = \frac{2s}{|\overline{AC}|} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$ . ■

### Приклад 13.

**а)** Чи є компланарними вектори  $\bar{a} = (1, -1, 4)$ ,  $\bar{b} = (-2, 3, 2)$ ,  $\bar{c} = (3, -4, 2)$ ?

► Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} e_2 + 2e_1 \\ e_3 - 3e_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

– вектори компланарні. ■

**б)** Дано вершини піраміди  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(0, -1, 1)$ ,  $C(2, 5, 24)$ ,  $D(3, 0, -2)$ . Знайти довжину висоти, опущеної з вершини  $D$ .

► Введемо вектори:

$$\vec{a} = \overline{AB} = (-1, -3, -2), \quad \vec{b} = \overline{AC} = (1, 3, -1), \quad \vec{c} = \overline{AD} = (2, -2, -5).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1 + e_2 \\ e_3 - 2e_2 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 24.$$

Знаходимо об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} |24| = 4 \text{ (од.}^3\text{)}.$$

Визначимо площу основи піраміди – трикутника  $ABC$ , яка дорівнює половині модуля векторного добутку векторів  $\overline{AB}$  і  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ (од.}^2\text{)}.$$

Об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{3\sqrt{10}/2} = \frac{2}{\sqrt{10}}. \blacksquare$$

**Приклад 14.** Розв'язати квадратне рівняння  $az^2 + bz + c = 0$ , якщо  $a = 4$ ,  $b = -24$ ,  $c = 45$  (задаються таблицею). Обчислити:  $2z_1 + 3iz_2$ ;  $\frac{4z_1 + i}{z_2 - i}$ ;  $\sqrt[3]{z_1}$ .

►  $4z^2 - 24z + 45 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 4 \cdot 45}}{8} = \frac{24 \pm \sqrt{-144}}{8} = \frac{24 \pm 12i}{8}.$$

$$z_1 = 3 + \frac{3}{2}i, \quad z_2 = 3 - \frac{3}{2}i.$$

а)  $2z_1 + 3iz_2 = \left(3 + \frac{3}{2}i\right) + 3i\left(3 - \frac{3}{2}i\right) = 3 + \frac{3}{2}i + 9i - \frac{9}{2}i^2 = \left(3 + \frac{9}{2}\right) + i\left(\frac{3}{2} + 9\right) = \frac{15}{2} + \frac{21}{2}i.$

б)  $\frac{4z_1 + i}{z_2 - i} = \frac{102}{45} + \frac{156}{45}i = \frac{34}{15} + \frac{52}{15}i.$

в)  $\sqrt[3]{z_1}$ . Зведемо число  $z_1$  до тригонометричного її форми

$$z_1 = 3 + \frac{3}{2}i = r(\cos \phi + i \sin \phi).$$

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{3/2}{3} = \operatorname{arctg} 0.5 \approx 26^\circ.$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{45}{9}}(\cos 26^\circ + i \sin 26^\circ)} = \sqrt[6]{\frac{45}{9}} \left( \cos \frac{26^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{26^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} \right) \quad (k = 0, 1, 2).$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \begin{cases} \sqrt[6]{\frac{45}{9}}(\cos 8^\circ + i \sin 8^\circ) \\ \sqrt[6]{\frac{45}{9}}(\cos 128^\circ + i \sin 128^\circ) \blacksquare \\ \sqrt[6]{\frac{45}{9}}(\cos 248^\circ + i \sin 248^\circ) \end{cases}$$

## ТЕМА 5

### Приклад 15.

**а)** Скласти рівняння прямої, що проходить через точку  $M_0(1, -2)$  перпендикулярно до прямої  $2x - 3y + 4 = 0$ .

► Шукана пряма проходить через точку  $M_0(1, -2)$  паралельно вектору нормалі до даної прямої  $\vec{n} = (2, -3)$  з врахуванням точки і нормалі та за формулою

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad \text{одержимо рівняння прямої: } \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-3}, \quad 3x + 2y + 1 = 0. \blacksquare$$

**б)** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(1, -2)$  та відтинає на осях  $Ox$ ,  $Oy$  відрізки однакової довжини.

► Якщо  $a$  – відрізок, що пряма відтинає на осі, то за рівнянням “у відрізках по осях” маємо:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a.$$

Точка  $M_0(1, -2)$  належить прямій, тому її координати задовольняють рівняння прямої:  $x_0 + y_0 = a \Rightarrow 1 - 2 = a \quad a = -1$ .

Шукане рівняння:  $x + y + 1 = 0. \blacksquare$

**в)** Визначити при яких значеннях  $a$  пряма  $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$  буде

- i. Паралельною до вісі  $0x$ .
- ii. Паралельною до вісі  $0y$ .
- iii. Проходить через початок координат.

► Будемо виходити з правила: пряма  $Ax + By + C = 0$  є

- i. паралельна до вісі  $0x$  при  $A = 0$
- ii. паралельна до вісі  $0y$  при  $B = 0$
- iii. проходить через початок координат при  $C = 0$ .

Таким чином, у задачі i)  $a + 2 = 0$ ,  $a = -2$ ; у задачі ii)  $a^2 - 9 = 0$ ,  $a = \pm 3$ ; у задачі iii)  $3a^2 - 8a + 5 = 0$ ,  $a = \frac{5}{3}$  і  $a = 1$ , тобто у випадках ii) та iii)

маємо дві прямі, які задовольняють умови задачі. ■

г) Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задані рівняннями  $x + 3y = 0$ ,  $x = 3$ ,  $x - 2y + 3 = 0$ .

► Вважатимемо, що трикутник є  $\Delta ABC$ . Вершина  $A$  є точкою перетину прямих  $x + 3y = 0$  і  $x = 3$ . Тоді координатами  $A$  є  $A(3; -1)$ . Хай точка  $B$  є точкою перетину прямих  $x = 3$  і  $x - 2y + 3 = 0$ . Відтак,  $B(3; 3)$ . Координати  $C\left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$ , як розв'язок системи двох рівнянь  $x + 3y = 0$  і  $x - 2y + 3 = 0$ . Кут при вершині  $A$  знайдемо за формулою

$$\cos A = \frac{(x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \cdot \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}}$$

$$\cos A = \frac{4 \cdot 8/5}{4 \cdot 1.6\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \sphericalangle A = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Кут при вершині  $B$  обчислимо аналогічно  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sphericalangle B = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$

Знайдемо кут  $C$ :  $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sphericalangle C = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

Перевірка. Сума усіх кутів складає  $180^\circ$ , бо  $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3\pi}{4}$  ■

д) Знайти відстань між прямими  $2x - 3y - 6 = 0$  та  $4x - 6y - 25 = 0$ .

► Спочатку на прямій  $2x - 3y - 6 = 0$  визначимо точку, а потім шукатимемо відстань від цієї точки до другої прямої.

Оберемо  $y = 0$ , тоді  $x = 3$ . Отже маємо точку  $M_0(3; 0)$  на прямій. Тоді

$$d = \left| \frac{4 \cdot 3 - 6 \cdot 0 - 25}{\sqrt{4^2 + 6^2}} \right| = \frac{13}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8 \quad \blacksquare$$

**Приклад 16.** Встановити канонічні рівняння кривих, що задані рівняннями

a)  $y^2 - 8y = 4x$

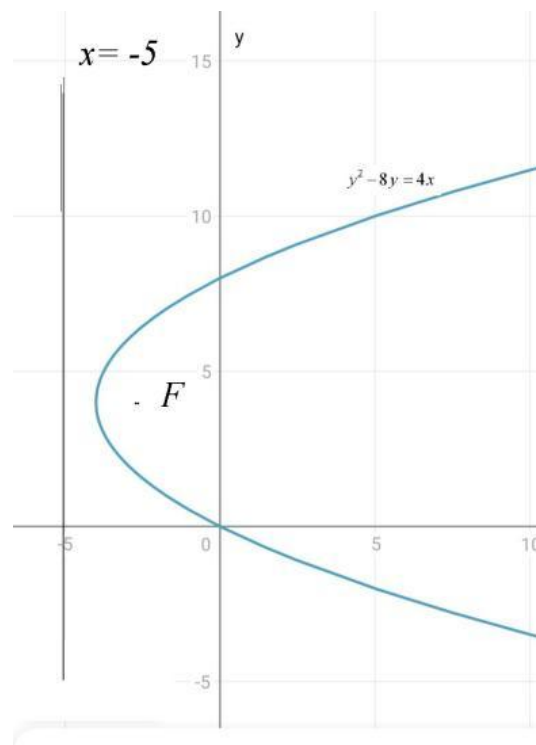
b)  $5x^2 - 6x + 5y^2 = 32$

c)  $5x^2 - 4y + 2y^2 = 24$

d)  $3x^2 - 2y^2 + 8y - 6x - 11 = 0$

Визначити геометричні параметри  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\varepsilon$ , рівняння директрис, асимптот. Побудувати криві.

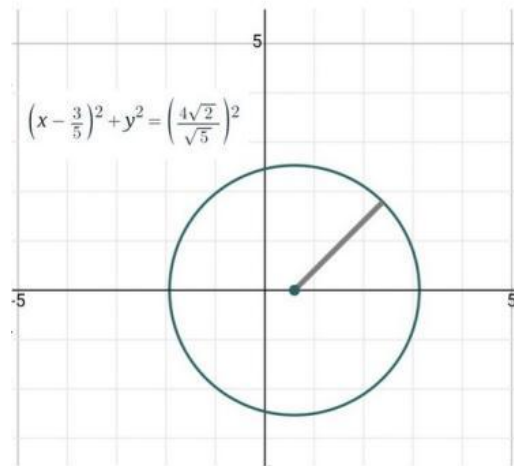
► Ліву частину доповнимо до повного квадрата  $y^2 - 8y + 16 - 16 = 4x$ . Після перетворень дістаємо параболу  $(y - 4)^2 = 4(x + 4)$ . Вершина у точці  $(-4, 4)$ ; фокус  $(-3, 4)$ ; директриса  $x = -5$



b) ►  $5x^2 - 6x + 5y^2 = 32$

$$5x^2 - 6x = 5\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{5}x + \frac{9}{25}\right) - \frac{9}{5} = 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{5} \quad 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + 5y^2 = 32$$

Маємо коло:  $R = \sqrt{6,4}$ , центр в точці  $(0,6, 0)$  і рівняння  $\frac{(x - \frac{3}{5})^2}{32/5} + \frac{y^2}{32/5} = 1$



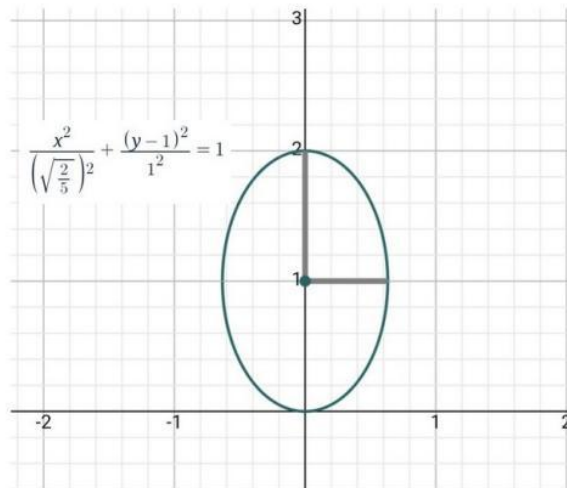
c) ►  $5x^2 - 4y + 2y^2 = 24$

$$2y^2 - 4y + 5x^2 = 2(y^2 - 2y + 1) + 5x^2 = 2$$

$$2(y-1)^2 + 5x^2 = 2 \quad \frac{(y-1)^2}{1} + \frac{x^2}{2/5} = 1$$

Характеристики еліпса

$$a = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0.63 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{1 - (0.4)^2} = 0.77 \quad \varepsilon = \frac{c}{b} = 0.77$$



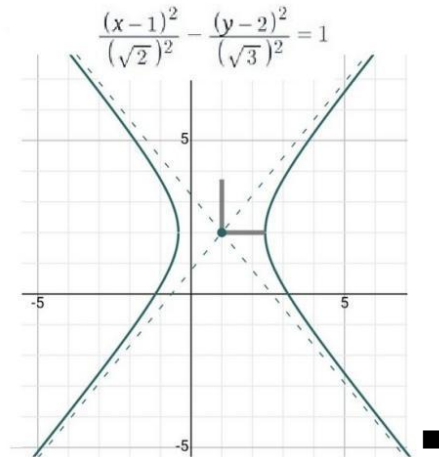
d)  $3x^2 - 2y^2 + 8y - 6x - 11 = 0$

► Виділимо в рівнянні повні квадрати:

$$3(x^2 - 2x + 1) - 2(y^2 - 4y + 7) - 3 + 8 - 11 = 0$$

$$3(x-1)^2 - 2(y-2)^2 = 6 \quad \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

Маємо гіперболу. Її параметри: півосі  $a = \sqrt{2}$   $b = \sqrt{3}$ , половина фокусної відстані  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ , центр  $(1, 2)$ ; вершини  $(1 - \sqrt{2}, 2)$   $(1 + \sqrt{2}, 2)$ , фокуси  $(1 - \sqrt{5}, 2)$   $(1 + \sqrt{5}, 2)$ , асимптоти  $y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x + 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$   $y = \sqrt{\frac{3}{2}}x + 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$



## ТЕМА 7

### Приклад 17.

Дано чотири точки  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4, z_4)$ .

Необхідно:

i) Скласти рівняння

а) площини  $A_1 A_2 A_3$ ;

б) прямої  $A_1 A_2$ ;

в) прямої  $A_4 M$ , що перпендикулярна до площини  $A_1 A_2 A_3$ ;

г) прямої  $A_3 N$ , що паралельна до прямої  $A_1 A_2$ ;

д) площини, яка проходить крізь точку  $A_4$  перпендикулярно до прямої  $A_1 A_2$ .

ii) Обчислити:

е) синус кута між прямою  $A_1 A_4$  та площиною  $A_1 A_2 A_3$ .

є) косинус кута між координатною площиною  $Oxy$  і площиною  $A_1 A_2 A_3$ .

Нехай  $A_1(2, 1, 7)$ ,  $A_2(3, 3, 6)$ ,  $A_3(2, -3, 9)$ ,  $A_4(1, 2, 5)$ .

► i)

а) Визначимо координати таких векторів

$$\overrightarrow{A_2 A_3} = \{2 - 3; -3 - 3; 9 - 6\} = \{-1, -6, 3\} \quad \overrightarrow{A_2 A_4} = \{1 - 3; 2 - 3; 5 - 6\} = \{-2, -1, -1\}$$

Ці два вектори належать шуканій площині . Знайдемо вектор нормалі до площини

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_2A_3} \times \overrightarrow{A_2A_4} \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -6 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 11\mathbf{k} \quad \vec{n} = \{9, -7, -11\}$$

Координати цього вектора і точки  $A_1$  дозволяють записати рівняння площини

$$2(x-2) - 7(y-1) - 11(z-7) = 0 \quad 2x - 7y - 11z + 80 = 0 \quad \blacksquare$$

б) Рівняння прямої  $A_1 A_2$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-7}{-1} \quad \vec{s} = \{1, 2, -1\}$$

У параметричній формі  $x = t + 2$ ;  $y = 2t + 1$ ;  $z = -t + 7$  ■

в) Пряма мусить мати напрям вектора  $\mathbf{n}$ . Тому її рівняння виразиться так

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-5}{-11} \quad \blacksquare$$

г) Пряма мусить за напрямком збігатися з напрямком  $A_1 A_2$  і проходити через точку  $A_3$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

д) Вектор  $\mathbf{s}$  буде нормаллю до шуканої площини. Відтак, її рівняння

$$1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-5) = 0 \quad x + 2y - z = 0 \quad \blacksquare$$

е) Збудуємо рівняння прямої  $A_1 A_4$

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-5}{7-5} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{2} \quad \vec{s}_1 = \{1, -1, 2\}$$

Потрібний кут утворюють вектори  $\mathbf{n}$  та  $\mathbf{s}_1$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}_1}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}_1|} = \frac{9 \cdot 1 + (-7) \cdot (-1) + (-11) \cdot 2}{\sqrt{81+49+121} \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{-6}{\sqrt{251} \cdot \sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{6}{251}} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{245}{251}}$$

Кут  $\alpha \approx 81^\circ$  або  $\alpha \approx 99^\circ$  ■

є) Орт вектора нормалі до площини  $Oxy$   $\mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$ . Знайдемо кут між  $\mathbf{k}$  і  $\mathbf{n}$

$$\cos \beta = \frac{-11}{\sqrt{81+49+121}} = -\frac{11}{\sqrt{251}} \quad \beta = \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{251}}\right) \quad \beta \approx 134^\circ \quad \blacksquare$$

**Приклад 18.** Знайти відстань між точкою  $M_0(0, 2, 3)$  і прямою

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$$

► Із рівняння прямої отримуємо:  $s = \{2; 1; 2\}$  - напрямний вектор прямої;  
 $M_1(3; 1; -1)$  - точка що належить прямій.

$$\text{Тоді } \overline{M_0M_1} = \{3 - 0, 1 - 2, -1 - 3\} = \{3, 1, -4\}$$

Величина  $|\overline{M_0M_1} \times \vec{s}|$  є площею паралелограма, на сторонах якого лежать і пряма, і точка.

$$|\overline{M_0M_1} \times \vec{s}| = \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \sqrt{(-6)^2 + 14^2 + (-1)^2} = \sqrt{233}$$

Шукана відстань  $d$  є висотою цього паралелограма, а основою є  $|\vec{s}|$

$$d = \frac{\sqrt{233}}{\sqrt{9}} = 5.09 \text{ (л.од.)} \blacksquare$$

## ТЕМА 8

**Приклад 19** За допомогою ортогонального перетворення евклідового векторного простору  $R^3$  привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

і знайти формули відповідного перетворення.

► Запишемо матрицю квадратичної форми:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вона є симетричною, сума елементів на кінцях бічних діагоналей є коефіцієнтами при мішаних добутках відповідних елементів матриці.

Щоб утворити канонічний вигляд квадратичної форми потрібно знати власні значення цієї матриці. Вони визначаються з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розкривши визначник, дістанемо рівняння

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0 \quad (\lambda^2 - 7\lambda + 10)(\lambda + 1) = 0 .$$

Звідси  $\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -1$ .

Відтак, канонічна форма матиме такий вид

$$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$$

Залишається отримати формули перетворення. Визначимо ортонормований базис  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$ , в якому квадратична форма має канонічний вигляд.

Нові базисні вектори є власними векторами лінійного оператора, що має ту ж матрицю, що і дана квадратична форма; отже, їх координати задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} (2 - \lambda)u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + (3 - \lambda)u_2 = 0, \\ 2u_1 + (1 - \lambda)u_3 = 0. \end{cases}$$

Спочатку покладемо  $\lambda_1 = 5$ , і шукатимемо координати власного вектора, що відповідає вектору  $\vec{i}'$

Система рівнянь стає такою

$$\begin{cases} -3u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 - 2u_2 = 0, \\ 2u_1 - 4u_3 = 0. \end{cases}$$

Якщо покласти  $u_3 = 1$ , вийде  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = -2$ . Власний вектор  $\vec{p} = (2, -2, 1)$ , не нормований.

Щоб отримати шуканий вектор  $\vec{i}'$ , потрібно нормувати вектор  $\vec{p}$

$$\vec{i}' = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Підставимо  $\lambda_2 = 2$ , вийде система

$$\begin{cases} -2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + u_2 = 0, \\ 2u_1 - u_3 = 0. \end{cases}$$

Як і раніше, знайдемо другий нормований власний вектор

$$\vec{j}' = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Нарешті, при  $\lambda_3 = -1$  проробимо ще раз те саме і знайдемо третій нормований власний вектор

$$\vec{k}' = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

Формули перетворення встановлено

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

Якщо підставити ці формули у задану квадратичну форму, переконаємося, що її канонічна форма є такою  $5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$ . ■

**Приклад 20.** Звести рівняння лінії  $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$  до канонічного вигляду і зобразити криву.

► До квадратичної форми відносяться перші три доданки. Тому матриця квадратичної форми має такий вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Шукаємо власні значення і власні вектори. Спочатку складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Звідси  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 5$ . Оскільки  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , крива є гіперболічного типу.

Знайдемо власні вектори

$$\text{При } \lambda_1 = -1 \text{ маємо систему рівнянь } \begin{cases} 3x + 3y = 0, \\ 3x + 3y = 0. \end{cases} \text{ Власний вектор}$$

$$\text{рівний } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{При } \lambda_2 = 5 \text{ маємо систему рівнянь } \begin{cases} -x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}, \text{ звідки другий власний}$$

$$\text{вектор } \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Привертає увагу, що  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ , і на цих векторах буде будуватися нова система координат  $OX_1$  і  $OY_1$  (див. рис.).

Унормуємо власні вектори, для чого укоротимо кожен на його довжину

$$\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від старого базису до нового має такий вигляд

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Перетворюємо координати  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ , або  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{cases}$

Тут  $(x_1, y_1)$  - нові координати.

Зазначимо, що ці ж вирази отримуються з формул повороту системи координат

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \text{ при } \alpha = -\frac{\pi}{4} \text{ і без власних векторів.}$$

До речі, нові координати через старі виражаються так

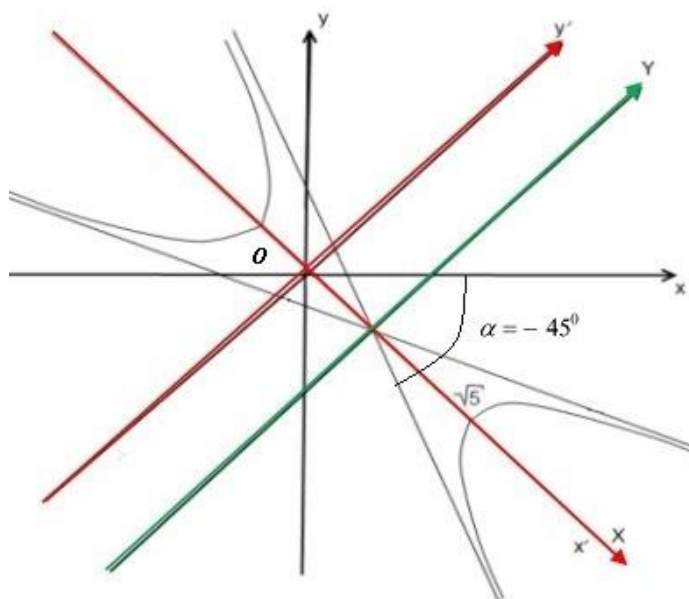
$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

У координатах  $(x_1, y_1)$  задана крива після зведення подібних членів виразиться рівнянням  $x_1^2 - 2\sqrt{2}x_1 - 5y_1^2 - 3 = 0$ . Виділимо повний квадрат

$(x_1 - \sqrt{2})^2 - 5y_1^2 = 5$ , тоді зведемо до канонічного шляхом паралельного

перенесення  $x_1 - \sqrt{2} = X$ ,  $y_1 = Y$ . В осях  $(X, Y)$  канонічне рівняння гіперболи

є таким  $\frac{X^2}{5} - \frac{Y^2}{1} = 1$ .



**Приклад 21.** Звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду. Встановити вид поверхні. Зробити рисунок.

► Зведемо рівняння поверхні 2-го порядку

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

до канонічного вигляду, визначимо її тип і запишемо перетворення координат.

Матриця квадратичної форми  $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$  дорівнює

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Складаємо характеристичний многочлен для визначення власних значень

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

Його коренями є  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$ ,  $\lambda_3 = 9$ . Відповідні їм орти власних векторів

дорівнюють  $\vec{e}'_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}'_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}'_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Формули ортогонального перетворення

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + 2y_1 + 2z_1),$$

$$y = \frac{1}{3}(2x_1 + y_1 - 2z_1),$$

$$z = \frac{1}{3}(2x_1 - 2y_1 + z_1).$$

Їх підставимо у рівняння поверхні й отримаємо

$$3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2 - 6x_1 - 24y_1 + 18z_1 + 30 = 0$$

Виділимо повні квадрати  $3(x_1 - 1)^2 + 6(y_1 - 2)^2 + 9(z_1 + 1)^2 = 6$ . Ще раз зробимо заміну  $x_2 = x_1 - 1$ ,  $y_2 = y_1 - 2$ ,  $z_2 = z_1 + 1$ .

Рухаючись по ланцюжку вгору, фіксуємо, що початкова система зазнала такого перетворення

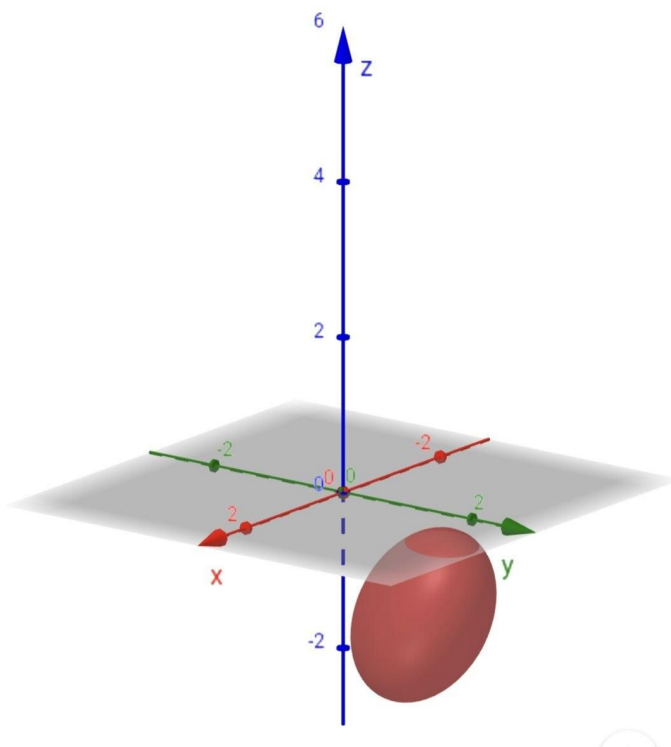
$$x = \frac{1}{3}(x_2 + 2y_2 + 2z_2) + 1,$$

$$y = \frac{1}{3}(2x_2 + y_2 - 2z_2) + 1,$$

$$z = \frac{1}{3}(2x_2 - 2y_2 + z_2) - 1.$$

Початок координат перемістився у точку  $O_2(1, 2, -1)$ . У новій системі координат отримали поверхню, канонічне рівняння якої

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{1} + \frac{z_2^2}{2/3} = 1. \quad \text{Це еліпсоїд.}$$



## ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ (ПО ВАРІАНТНО)

Завдання 1. Обчислити визначник 4-го порядку

$$1. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$11. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$12. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$14. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$15. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

## Дії з матрицями

Знайти значення полінома  $A^3 - 7A^2 + 13A - E$  з матрицями

1.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

3.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

6.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

8.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

9.  $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

10.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

11.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

12.  $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 31 \\ 4 & 0 & -43 \\ 2 & 3 & -20 \end{pmatrix}$

13.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -16 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

14.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 2 & 7 & 30 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

15.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 15 \\ 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$

16.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

17.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

18.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

19.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

20.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

21.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

22.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

23.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

24.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

25.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

26.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

27.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

28.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

29.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

30.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

## Завдання 3.

Знайти обернену матрицю. Результат підтвердити перевіркою

1. 
$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. 
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

6. 
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

7. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

8. 
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

9. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

10. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

11. 
$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

12. 
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. 
$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14. 
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

15. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

16. 
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. 
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

18. 
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

19. 
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

20. 
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

21. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. 
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

23. 
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

24. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

25. 
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

26. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

27. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

28. 
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

29. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

30. 
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

## Завдання 4.

Систему рівнянь розв'язати трьома способами:

- a) методом Крамера;
- b) матричним способом;
- c) методом Гауса.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases} \quad 11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases} \quad 17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \quad 23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = +8. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases} \quad 29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10. \end{cases}$$

## Завдання 5.

Систему рівнянь, задану розширеною матрицею, дослідити на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі:

$$1. \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 6 \end{array} \right)$$

$$2. \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$3. \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

$$4. \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

$$5. \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & -4 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$6. \left( \begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$7. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 & 11 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

$$8. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$9. \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$10. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$11. \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$12. \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$13. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$14. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$15. \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$16. \left( \begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$17. \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$18. \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$19. \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & -1 & -3 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$20. \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

$$21. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

$$22. \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

$$23. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$24. \left( \begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

$$25. \left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$26. \left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$27. \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$28. \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

$$29. \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

$$30. \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

### Завдання 6.

Знайти фундаментальні розв'язки системи рівнянь:

$$1. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 + 9x_2 - 15x_3 + 8x_4 - 3x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0; \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0; \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 8x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 0, \\ 5x_1 + 18x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 + 11x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 13x_2 + 4x_3 + 16x_4 - 10x_5 = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 8x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 7x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_3 + 28x_4 = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 7.

Встановити базис

У просторі  $R^3$  задано п'ять векторів:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}.$$

Потрібно:

- 1) знайти три вектори, що утворюють базис, і розкласти інші вектори в цьому базисі;  
 2) перейти до нового базису і знайти координати розкладу інших векторів у новому базисі.

№	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	№	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$
<b>1</b>	2	3	-1	1	0	<b>2</b>	9	2	1	0	-4
	-1	-1	-1	-1	-1		-3	-1	-1	-1	3
	2	2	3	2	3		5	2	2	3	-8
<b>3</b>	0	3	2	1	3	<b>4</b>	0	3	2	-1	1
	-1	-3	-1	-1	1		-1	0	-1	1	-1
	3	8	2	2	-5		3	-2	2	-3	2
<b>5</b>	-1	1	0	-1	2	<b>6</b>	-1	-3	1	1	-1
	1	-1	-1	3	-1		3	8	-4	-2	1
	-3	2	3	-7	2		0	-2	-1	2	-3
<b>7</b>	-5	-1	1	-1	7	<b>8</b>	-1	-5	-1	1	3
	16	3	-2	1	-15		1	10	3	-2	-2
	1	0	2	-3	10		-3	-8	0	2	11
<b>9</b>	-1	2	-1	3	1	<b>10</b>	3	1	-1	-3	-1
	1	-1	3	-6	-2		-6	-2	1	8	3
	-3	8	0	5	2		5	2	-3	-3	0
<b>11</b>	3	5	-9	1	-7	<b>12</b>	21	3	1	-7	7
	-2	-3	6	-1	5		-14	-2	-1	5	-6
	-5	-9	16	-1	12		-36	-5	-1	12	-11
<b>13</b>	-7	-9	3	1	25	<b>14</b>	-7	18	3	5	1
	5	7	-2	-1	-18		5	-13	-2	-4	-1
	12	15	-5	-1	-42		12	-30	-5	-8	-1
<b>15</b>	5	1	-7	7	3	<b>16</b>	-1	-3	5	1	3
	-4	-1	5	-4	-2		2	5	-7	-1	-4
	-8	-1	12	-14	-5		0	-2	7	2	5
<b>17</b>	-9	-1	1	3	-1	<b>18</b>	3	3	-1	1	-9
	15	2	-1	-4	0		-4	-3	2	-1	13
	-7	0	2	5	-6		5	8	0	2	-13
<b>19</b>	3	-6	-1	-1	1	<b>20</b>	-1	1	3	-7	-1
	-4	9	2	1	-1		1	-1	-4	9	2
	5	-8	0	-3	2		-3	2	5	-11	0
<b>21</b>	0	-1	0	1	-1	<b>22</b>	0	0	1	-1	4
	1	3	-2	-1	0		6	1	-1	0	-5
	-1	0	3	-2	4		-7	-1	-2	4	-9
<b>23</b>	-1	-3	0	1	4	<b>24</b>	-1	3	0	2	1
	0	3	1	-1	0		0	0	1	-2	-1
	4	8	-1	-2	-15		4	-11	-1	-5	-2

<b>25</b>	2	1	-1	-2	0	<b>26</b>	-1	-3	3	1	1
	-2	-1	0	4	1		0	-1	3	1	2
	-5	-2	4	1	-1		-3	-8	7	2	2
<b>27</b>	-7	-1	1	1	3	<b>28</b>	1	-1	-1	1	-3
	-3	0	1	2	-2		2	3	0	1	-5
	-19	-3	2	2	9		2	-4	-3	2	-7
<b>29</b>	1	-2	-1	1	1	<b>30</b>	1	1	1	-5	-1
	2	-3	0	-1	1		-1	1	2	-5	0
	2	-5	-3	3	2		3	2	2	-11	-3

## Завдання 8.

Старий і новий базиси. Матриця переходу.

Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом. Знайти матрицю переходу від «старого» базису до «нового»

<b>B</b>	«старий»	«НОВИЙ»
1	$e_1 = (1, 2, 1),$ $e_2 = (2, 3, 3),$ $e_3 = (3, 7, 1);$	$e'_1 = (3, 1, 4),$ $e'_2 = (5, 2, 1),$ $e'_3 = (1, 1, -6).$
2	$e_1 = (1, 2, 2),$ $e_2 = (0, 1, 5),$ $e_3 = (-3, 4, 1);$	$e'_1 = (0, 3, 1),$ $e'_2 = (2, 1, 2),$ $e'_3 = (-4, -1, 3).$
3	$e_1 = (1, -4, -3),$ $e_2 = (-2, 0, 0),$ $e_3 = (3, 5, 0);$	$e'_1 = (-1, 2, 0),$ $e'_2 = (1, -5, 0),$ $e'_3 = (3, 0, 4).$
4	$e_1 = (2, 3, 1),$ $e_2 = (1, 2, 2),$ $e_3 = (1, 1, 0);$	$e'_1 = (2, 1, 3),$ $e'_2 = (1, 0, 1),$ $e'_3 = (1, 2, 2).$
5	$e_1 = (1, 3, 2),$ $e_2 = (2, 2, -1),$ $e_3 = (-3, -4, 0);$	$e'_1 = (1, 10, 10),$ $e'_2 = (-3, 2, 7),$ $e'_3 = (0, 7, 8).$
6	$e_1 = (1, -3, 2),$ $e_2 = (0, 1, -1),$ $e_3 = (2, 0, -2);$	$e'_1 = (2, 3, 1),$ $e'_2 = (3, 4, 1),$ $e'_3 = (1, 2, 2).$
7	$e_1 = (-2, 1, -1),$ $e_2 = (1, 3, 2),$	$e'_1 = (1, 4, 2),$ $e'_2 = (-1, 1, -3),$

	$e^{\rightarrow}_3 = (-1, -4, 1);$	$e^{\rightarrow'}_3 = (3, -1, 0).$
8	$e^{\rightarrow}_1 = (1, -2, 0),$ $e^{\rightarrow}_2 = (1, 3, 1),$ $e^{\rightarrow}_3 = (1, 2, 1);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (2, 1, 1),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (3, -3, 1),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (1, -3, 0).$
9	$e^{\rightarrow}_1 = (1, -1, 1),$ $e^{\rightarrow}_2 = (-1, 1, 0),$ $e^{\rightarrow}_3 = (2, -3, 1);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (2, -3, 0),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (-1, 2, 1),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (3, -4, 2).$
10	$e^{\rightarrow}_1 = (-2, 3, 3),$ $e^{\rightarrow}_2 = (0, 3, 2),$ $e^{\rightarrow}_3 = (-1, 1, 1);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (1, -3, -3),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (-2, 1, 2),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (1, 1, 0).$
11	$e^{\rightarrow}_1 = (2, 3, 5),$ $e^{\rightarrow}_2 = (0, 1, 2),$ $e^{\rightarrow}_3 = (1, 0, 0);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (1, 1, 1),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (1, 1, -1),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (2, 1, 2).$
12	$e^{\rightarrow}_1 = (2, 0, 3),$ $e^{\rightarrow}_2 = (4, 1, 5),$ $e^{\rightarrow}_3 = (3, 1, 2);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (1, 2, -1),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (4, 5, -2),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (1, -1, 1).$
13	$e^{\rightarrow}_1 = (2, -1, 3),$ $e^{\rightarrow}_2 = (-1, 1, 0),$ $e^{\rightarrow}_3 = (1, -1, 1);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (-3, 3, -2),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (3, 1, 3),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (-2, 0, -2).$
14	$e^{\rightarrow}_1 = (-1, 2, 1),$ $e^{\rightarrow}_2 = (1, -1, 0),$ $e^{\rightarrow}_3 = (1, 2, 1);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (3, 2, 2),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (-2, 1, -1),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (-5, 2, 3).$
15	$e^{\rightarrow}_1 = (3, 1, 2),$ $e^{\rightarrow}_2 = (-2, -1, -1),$ $e^{\rightarrow}_3 = (1, 2, 3);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (2, 1, 1),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (4, -3, -2),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (-1, 2, 1).$
16	$e^{\rightarrow}_1 = (3, 1, 4),$ $e^{\rightarrow}_2 = (5, 2, 1),$ $e^{\rightarrow}_3 = (1, 1, -6);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (2, 1, -3),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (-1, 3, 1),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (0, -1, -2).$
17	$e^{\rightarrow}_1 = (-1, 1, -2),$ $e^{\rightarrow}_2 = (1, 3, 2),$ $e^{\rightarrow}_3 = (0, -5, 1);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (2, -1, -5),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (-1, 1, 2),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (7, 2, -7).$
18	$e^{\rightarrow}_1 = (2, 1, 3),$ $e^{\rightarrow}_2 = (1, 2, 2),$ $e^{\rightarrow}_3 = (0, 10, -1);$	$e^{\rightarrow'}_1 = (-4, -1, 3),$ $e^{\rightarrow'}_2 = (1, -1, 1),$ $e^{\rightarrow'}_3 = (-4, 4, 2).$

19	$e^{\vec{1}} = (-4, -3, 5),$ $e^{\vec{2}} = (5, 1, 1),$ $e^{\vec{3}} = (0, -2, 6);$	$e^{\vec{1}'} = (2, 3, 1),$ $e^{\vec{2}'} = (3, -1, 4),$ $e^{\vec{3}'} = (1, 2, -1).$
20	$e^{\vec{1}} = (-3, 2, 1),$ $e^{\vec{2}} = (1, 1, 0),$ $e^{\vec{3}} = (-16, 6, 5);$	$e^{\vec{1}'} = (5, 3, 4),$ $e^{\vec{2}'} = (-6, -3, -5),$ $e^{\vec{3}'} = (4, 2, 2).$
21	$e^{\vec{1}} = (3, 1, 2),$ $e^{\vec{2}} = (-2, 1, 3),$ $e^{\vec{3}} = (11, 2, 3);$	$e^{\vec{1}'} = (1, 2, 3),$ $e^{\vec{2}'} = (3, 7, -1),$ $e^{\vec{3}'} = (-1, 4, 6).$
22	$e^{\vec{1}} = (7, 5, 10),$ $e^{\vec{2}} = (2, -3, -11),$ $e^{\vec{3}} = (3, 2, 5);$	$e^{\vec{1}'} = (2, 1, 3),$ $e^{\vec{2}'} = (1, 2, 2),$ $e^{\vec{3}'} = (0, -1, 12).$
23	$e^{\vec{1}} = (-3, 2, 1),$ $e^{\vec{2}} = (2, 1, 2),$ $e^{\vec{3}} = (-16, 6, 5);$	$e^{\vec{1}'} = (3, 1, 2),$ $e^{\vec{2}'} = (5, -2, 0),$ $e^{\vec{3}'} = (11, 2, 3).$
24	$e^{\vec{1}} = (2, 6, 5),$ $e^{\vec{2}} = (5, -3, -2),$ $e^{\vec{3}} = (7, 1, -3);$	$e^{\vec{1}'} = (1, -2, 3),$ $e^{\vec{2}'} = (3, 1, 4),$ $e^{\vec{3}'} = (-5, -1, 1).$
25	$e^{\vec{1}} = (1, 6, -4),$ $e^{\vec{2}} = (-2, 0, 5),$ $e^{\vec{3}} = (3, 1, -3);$	$e^{\vec{1}'} = (-2, 2, 1),$ $e^{\vec{2}'} = (1, 0, 2),$ $e^{\vec{3}'} = (1, 1, 3).$
26	$e^{\vec{1}} = (3, 5, 1),$ $e^{\vec{2}} = (-2, -1, 2),$ $e^{\vec{3}} = (1, 4, -1);$	$e^{\vec{1}'} = (2, 1, 2),$ $e^{\vec{2}'} = (3, -1, 1),$ $e^{\vec{3}'} = (14, 2, -2).$
27	$e^{\vec{1}} = (4, 2, 1),$ $e^{\vec{2}} = (2, -1, 0),$ $e^{\vec{3}} = (-1, 5, 1);$	$e^{\vec{1}'} = (3, 6, 5),$ $e^{\vec{2}'} = (1, -1, -2),$ $e^{\vec{3}'} = (4, 1, 3).$
28	$e^{\vec{1}} = (4, 2, 1),$ $e^{\vec{2}} = (2, -1, 0),$ $e^{\vec{3}} = (-1, 5, 1);$	$e^{\vec{1}'} = (3, 6, 5),$ $e^{\vec{2}'} = (1, -1, -2),$ $e^{\vec{3}'} = (4, 1, 3).$
29	$e^{\vec{1}} = (1, 2, 2),$ $e^{\vec{2}} = (-2, 1, -4),$ $e^{\vec{3}} = (1, 1, 3);$	$e^{\vec{1}'} = (2, 0, 4),$ $e^{\vec{2}'} = (3, 5, 2),$ $e^{\vec{3}'} = (1, 1, -3).$
30	$e^{\vec{1}} = (2, -1, 5),$	$e^{\vec{1}'} = (1, 3, -1),$

$e_2 = (3, 2, 1),$ $e_3 = (5, 6, -3);$	$e'_2 = (1, -1, 1),$ $e'_3 = (3, -4, 5).$
---	--

## Завдання 9.

Скалярний добуток і застосування

	За даними координатами точок $A, B$ і $C$ для зазначених векторів знайти:
	а) довжину вектора $\vec{a}$ ; б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ; в) кут між цими векторами;
	г) проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$

$B \bullet$	$A$	$B$	$C$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(5, 4, 4)	(-5, 2, 3)	(4, 2, -5)	$11\vec{AC} - 6\vec{AB}$	$\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{AC}$
2	(6, 5, -4)	(-5, 2, 2)	(3, 3, 2)	$6\vec{AB} - 3\vec{CB}$	$\vec{AC}$	$\vec{AC}$	$\vec{CB}$
3	(2, 4, 3)	(3, 1, -4)	(-1, 2, 2)	$2\vec{BA} + 4\vec{AC}$	$\vec{BA}$	$\vec{BA}$	$\vec{AB}$
4	(-2, -3, -4)	(2, -4, 0)	(1, 4, 5)	$4\vec{AC} - 8\vec{BC}$	$\vec{AB}$	$\vec{AB}$	$\vec{BC}$
5	(2, 4, 6)	(-3, 5, 1)	(4, -5, -4)	$-6\vec{BC} + 2\vec{BA}$	$\vec{CA}$	$\vec{CA}$	$\vec{BA}$
6	(-5, 4, 3)	(4, 5, 2)	(2, 7, -4)	$3\vec{BC} + 2\vec{AB}$	$\vec{CA}$	$\vec{CA}$	$\vec{AB}$
7	(3, 5, 4)	(4, 2, -3)	(-2, 4, 7)	$3\vec{BA} - 4\vec{AC}$	$\vec{AB}$	$\vec{BA}$	$\vec{AC}$
8	(-2, 3, -4)	(3, -1, 2)	(4, 2, 4)	$7\vec{AC} + 4\vec{CB}$	$\vec{AB}$	$\vec{AB}$	$\vec{CB}$
9	(3, 4, 1)	(5, -2, 6)	(4, 2, -7)	$-7\vec{AC} + 5\vec{AB}$	$\vec{BC}$	$\vec{BC}$	$\vec{AC}$
10	(4, 6, 7)	(2, -4, 1)	(-3, -4, 2)	$5\vec{AB} - 2\vec{AC}$	$\vec{BC}$	$\vec{BC}$	$\vec{AB}$
11	(1, 3, 2)	(-2, 4, -1)	(1, 3, -2)	$2\vec{AB} + 5\vec{CB}$	$\vec{AC}$	$\vec{AC}$	$\vec{AB}$
12	(10, 6, 3)	(-2, 4, 5)	(3, -4, -6)	$5\vec{AC} - 2\vec{CB}$	$\vec{BA}$	$\vec{BA}$	$\vec{AC}$

13	(3, 4, 6)	(-4, 6, 4)	(5, -2, -3)	$-7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BC}$
14	(-3, -5, 6)	(3, 5, -4)	(2, 6, 4)	$4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
15	(2, 4, 5)	(1, -2, 3)	(-1, -2, 4)	$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
16	(-2, -3, -2)	(1, 4, 2)	(1, -3, 3)	$2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
17	(-4, -2, -5)	(3, 7, 2)	(4, 6, -3)	$9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
18	(6, 4, 5)	(-7, 1, 8)	(2, -2, -7)	$5\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
19	(-2, -2, 4)	(1, 3, -2)	(1, 4, 2)	$2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
20	(0, 2, 5)	(2, -3, 4)	(3, 2, -5)	$-3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
21	(4, 5, 3)	(-4, 2, 3)	(5, -6, -2)	$9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
22	(4, 3, 2)	(-4, -3, 5)	(6, 4, -3)	$8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
23	(4, 6, 3)	(-5, 2, 6)	(4, -4, -3)	$4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
24	(2, -4, 3)	(-3, -2, 4)	(0, 0, -2)	$3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
25	(3, 2, 4)	(-2, 1, 3)	(2, -2, 1)	$4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
26	(-5, -2, -6)	(3, 4, 5)	(2, -5, 4)	$8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
27	(1, 3, 2)	(-2, 4, -1)	(1, 3, -2)	$2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
28	(-1, -2, 4)	(-1, 3, 5)	(1, 4, 2)	$3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
29	(5, 6, 1)	(-2, 4, -1)	(3, -3, 3)	$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
30	(4, 3, -2)	(-3, -1, 4)	(2, 2, 1)	$-5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$

Завдання 10.

А) Векторний добуток

У декартовій прямокутній системі координат задано точки:

$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4)$ .

Знайти:

1) синус кута між векторами  $\overrightarrow{A_1A_2}$   $\overrightarrow{A_1A_4}$ ;

2) площу трикутника  $A_1A_2A_3$ ;

3) об'єм піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ .

1.  $A_1(1, 4, 1), A_2(3, 2, 1), A_3(1, -1, -3), A_4(10, 7, 4)$ .
2.  $A_1(-2, 3, -2), A_2(-3, 5, 4), A_3(6, 5, 3), A_4(2, -3, 4)$ .
3.  $A_1(-3, -5, 6), A_2(2, 7, -2), A_3(9, 6, 3), A_4(7, 5, 3)$ .
4.  $A_1(6, -3, 2), A_2(4, 8, -3), A_3(3, 6, -4), A_4(5, 3, 3)$ .
5.  $A_1(4, 6, 3), A_2(-6, 2, 6), A_3(3, -2, 3), A_4(-5, 6, 4)$ .
6.  $A_1(2, 3, -4), A_2(8, -3, 2), A_3(6, 5, -3), A_4(-4, 2, 3)$ .
7.  $A_1(-2, 3, 4), A_2(5, 5, 6), A_3(2, 3, 4), A_4(4, -3, 2)$ .
8.  $A_1(8, 7, 5), A_2(4, -3, 2), A_3(6, 4, 1), A_4(-2, 5, 8)$ .
9.  $A_1(-5, 6, 4), A_2(8, 9, 10), A_3(4, 8, 7), A_4(-2, 1, 5)$ .
10.  $A_1(2, -1, 2), A_2(3, 2, -2), A_3(-3, 6, -2), A_4(4, -1, -3)$ .
11.  $A_1(1, -1, 3), A_2(8, 5, 3), A_3(9, 6, 3), A_4(3, 6, -4)$ .
12.  $A_1(-5, 6, 1), A_2(-1, 3, 0), A_3(1, -2, 2), A_4(-1, 1, 3)$ .
13.  $A_1(1, -7, 5), A_2(0, -9, 7), A_3(2, 3, -2), A_4(-3, 1, -1)$ .
14.  $A_1(5, 2, 3), A_2(7, 5, -6), A_3(-2, -5, -1), A_4(-1, -1, -1)$ .
15.  $A_1(-2, 4, 2), A_2(3, 7, 0), A_3(5, 4, 3), A_4(-1, -3, 2)$ .
16.  $A_1(6, 5, 4), A_2(9, -2, 7), A_3(6, 4, 1), A_4(8, 3, 2)$ .
17.  $A_1(3, 4, -1), A_2(5, -1, 1), A_3(-2, 0, 3), A_4(-3, -5, 5)$ .
18.  $A_1(2, 3, 4), A_2(11, 4, 7), A_3(6, 10, 12), A_4(4, -1, 5)$ .
19.  $A_1(1, 8, -3), A_2(9, -2, 4), A_3(12, 5, 4), A_4(8, -2, 4)$ .
20.  $A_1(4, -3, 5), A_2(6, 9, 0), A_3(7, 3, 4), A_4(2, 3, 5)$ .
21.  $A_1(1, 1, 1), A_2(2, -1, 1), A_3(4, -2, 3), A_4(8, -4, 5)$ .
22.  $A_1(6, -3, 2), A_2(5, 1, 4), A_3(2, 1, 1), A_4(4, 0, -2)$ .
23.  $A_1(0, -2, 1), A_2(4, -2, 1), A_3(-2, 0, -2), A_4(-10, 2, -3)$ .
24.  $A_1(9, 7, 4), A_2(3, -2, -5), A_3(4, 7, 6), A_4(8, 0, -4)$ .
25.  $A_1(1, 1, -3), A_2(-2, -1, 1), A_3(3, 1, -2), A_4(8, 2, -3)$ .

26.  $A_1(6, 4, -1)$ ,  $A_2(-2, 5, -2)$ ,  $A_3(3, 3, 5)$ ,  $A_4(4, -4, 3)$ .  
 27.  $A_1(4, -3, 3)$ ,  $A_2(5, 2, 6)$ ,  $A_3(2, 3, 2)$ ,  $A_4(5, 0, -2)$ .  
 28.  $A_1(5, 2, -4)$ ,  $A_2(8, -1, 7)$ ,  $A_3(5, 6, 3)$ ,  $A_4(-1, 4, 2)$ .  
 29.  $A_1(-1, 4, 4)$ ,  $A_2(7, 6, 3)$ ,  $A_3(2, 4, 7)$ ,  $A_4(7, -5, 3)$ .  
 30.  $A_1(6, 6, 4)$ ,  $A_2(5, -4, 1)$ ,  $A_3(7, 8, 3)$ ,  $A_4(-4, 6, 2)$ .

Б) Дано вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Слід: обчислити мішаний добуток векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  й переконатися, чи вони є компланарні.

1.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ .
2.  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$ .
3.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ .
4.  $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .
5.  $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ .
6.  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .
7.  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .
8.  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = -12\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ .
9.  $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .
10.  $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 8\mathbf{k}$ .
11.  $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ .
12.  $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ .
13.  $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .
14.  $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ .
15.  $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ .
16.  $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ .
17.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -9\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ .
18.  $\mathbf{a} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ .
19.  $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .
20.  $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$ .
21.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ .
22.  $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ .
23.  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ .

24.  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ .

25.  $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

26.  $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .

27.  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ .

28.  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ .

29.  $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ .

30.  $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{c} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ .

**Завдання 11**

Виконати дії з комплексними числами.

Розв'язати квадратне рівняння  $az^2 + bz + c = 0$ , якщо  $a$ ,  $b$ ,  $c$  задані таблицею.Знайдені розв'язки  $z_1$  і  $z_2$  записати у тригонометричній формі. Обчислити:  $2z_1 + 3iz_2$ ;

$$\frac{4z_1 + i}{z_2 - i}; \sqrt[3]{z_1}.$$

B	a	b	c
1	4	-4	5
2	9	12	12
3	8	-20	17
4	5	6	2
5	36	-48	25
6	49	14	10
7	4	-16	25
8	9	18	58
9	16	-40	29
10	25	20	29
11	36	-36	25
12	49	70	26
13	4	-24	45
14	9	24	65
15	8	-28	65

B	a	b	c
16	25	20	53
17	18	-18	17
18	49	56	25
19	4	-4	17
20	9	30	74
21	16	-40	29
22	5	14	10
23	18	30	17
24	49	-28	13
25	2	-14	25
26	9	48	89
27	16	-24	34
28	6	16	13
29	36	-48	25
30	49	84	40

**Завдання 12.**

Пряма на площині

1. Точки  $A(4,0)$  і  $B(6,8)$  є вершинами трикутника, а  $D(5,1)$  – точкою перетину його висот. Знайти третю вершину.

2. На прямій  $4x + 3y - 5 = 0$  знайти точку, рівновіддалену від точок  $A(1, 2)$  і  $B(-1, -4)$ .
3. Прямі  $2x + y - 1 = 0$  і  $4x - y - 11 = 0$  є сторонами трикутника, а  $P(1, 2)$  – точкою перетину третьої сторони з висотою, опущеною на неї. Знайти рівняння третьої сторони.
4. Прямі  $3x - 4y + 16 = 0$  і  $5x - 2y - 6 = 0$  є сторонами паралелограма, а  $P(0, 2)$  – точкою перетину його діагоналей. Знайти рівняння двох інших сторін.
5. Пряма  $5x - 3y + 4 = 0$  є стороною трикутника, а прямі  $4x - 3y + 2 = 0$  і  $7x + 2y - 13 = 0$  – його висотами. Знайти рівняння інших сторін.
6. Знайти координати точки, симетричної точці  $A(3, -4)$  відносно прямої  $2x + 8y - 5 = 0$ .
7. Точки  $A(4, 5)$  і  $C(2, -1)$  – протилежні вершини ромба, пряма  $x - y + 1 = 0$  – його сторона. Знайти рівняння інших сторін.
8.  $A(3, -1)$  і  $B(4, 0)$  – вершини трикутника,  $D(2, 1)$  – точка перетину медіан. Знайти рівняння висоти, яка проходить через третю вершину.
9. Прямі  $5x - 4y + 16 = 0$  і  $4x + y - 4 = 0$  – сторони трикутника,  $D(1, 3)$  – точка перетину медіан. Знайти третю сторону.
10. Знайти пряму, яка проходить через точку  $A(4, 1)$  на відстані 4 одиниць від точки  $B(-4, 0)$ .
11. Дано точки  $C(5, 0)$  і  $B(1, 4)$ . Знайти відношення, в якому пряма  $x - 2y + 3 = 0$  ділить відрізок  $CB$ .
12. Дано точки  $A(-4, 0)$  і  $B(2, -8)$ . На прямій  $x + 1 = 0$  знайти точку  $M$ , в якій прямі  $AM$  і  $BM$  перпендикулярні.
13. Знайти пряму, що проходить через точку  $A(1, -2)$ , в якій відрізок її між осями координат ділиться навпіл.
14. Точки  $A(1, 2)$  і  $C(3, 6)$  – протилежні вершини квадрата. Скласти рівняння його сторін.
15. Показати, що трикутник із сторонами, заданими рівняннями  $x + 3y + 1 = 0$ ,  $3x + y + 1 = 0$  і  $x - y = 10$ , рівнобедрений. Знайти кут при його вершині.
16. Дано вершини паралелограма:  $A(0, 0)$ ,  $B(1, -3)$ ,  $C(7, -1)$ . Знайти кут між його діагоналями і показати, що паралелограм є прямокутником.
17. Дві вершини квадрата створені перетином прямої  $4x + 3y = 12$  з осями координат. Знайти координати двох інших його вершин.
18. Скласти рівняння тих прямих, що проходять через точку  $M(2, 7)$  і утворюють кут  $45^\circ$  із прямою  $AB$ , де  $A(-1, 7)$ ,  $B(8, -2)$ .
19. Дано рівняння двох сторін трикутника  $5x - 4y + 15 = 0$ ,  $4x + y - 9 = 0$  і точку  $P(0, 2)$  перетину медіан. Знайти рівняння третьої сторони трикутника.

20. Дано рівняння висот  $2x - 3y + 1 = 0$ ,  $x + 2y + 1 = 0$  і вершину  $A(2, 3)$  трикутника. Знайти рівняння сторін трикутника.
21. Дано рівняння сторони  $4x + y - 12 = 0$  і висот  $5x - 4y - 12 = 0$ ,  $x + y - 6 = 0$  трикутника. Знайти рівняння інших сторін та висоти.
22. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку  $M(-6, 8)$  та відтинає від координатного кута трикутник площею  $12$  од<sup>2</sup>.
23. Дано рівняння однієї діагоналі  $x - 2 = 0$  і двох сторін паралелограма  $x + 2y + 2 = 0$ ,  $x + y - 4 = 0$ . Знайти координати його вершин.
24. Дано рівняння двох сторін  $2x + 3y - 6 = 0$  (AB),  $x + 2y - 5 = 0$  (AC) трикутника ABC і кут при вершині B, що дорівнює  $45^\circ$ . Знайти рівняння висоти, опущеної з вершини A.
25. Дано дві вершини трикутника  $A(-3, 3)$ ,  $B(5, -1)$  і точку перетину його висот  $P(4, 3)$ . Знайти рівняння сторін трикутника.
26. Скласти рівняння бісектрис кутів між прямими  $7x - y = 19$  і  $2x + y = 5$ .
27. Скласти рівняння бісектриси кута A трикутника ABC з вершинами:  $A(1, 1)$ ,  $B(10, 13)$ ,  $C(13, 6)$ .
28. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку  $A(5, 1)$  і утворюють із прямою  $2x + y = 4$  кут  $45^\circ$ .
29. У трикутнику ABC дано координати точки  $A(2, 6)$  та рівняння висоти  $x + 7y + 15 = 0$  і бісектриси  $6x - 42y - 85 = 0$ , які проведені з однієї вершини. Скласти рівняння сторін трикутника.
30. У трикутнику дано вершину  $A(2, -7)$ , висоту  $3x + y + 11 = 0$  і медіану  $x + 2y + 7 = 0$ , що проведені з різних вершин. Скласти рівняння сторін.

### Завдання 13.

Встановити канонічні рівняння кривих, що задані рівняннями

1	$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$	16	$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$
2	$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$	17	$x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$
3	$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$	18	$x^2 + y^2 - 8x = 0$
4	$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$	19	$x^2 + y^2 + 4y = 0$
5	$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$	20	$4x^2 - 8x - y + 7 = 0$
6	$9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$	21	$x^2 - 12x + 6y + 42 = 0$
7	$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$	22	$4x^2 + y^2 - 4y = 0$
8	$x^2 - 2y^2 + 12x - 14 = 0$	23	$3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$

9	$4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0$	24	$x^2 + y^2 + 8x + 16y - 1 = 0$
10	$9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y + 20 = 0$	25	$x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$
11	$x^2 + y^2 - 12x + 14y + 60 = 0$	26	$x^2 + y^2 + 18x - 16y = 0$
12	$x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$	27	$x^2 - 5x + 6y + 4 = 0$
13	$x^2 + 6x - 8y + 22 = 0$	28	$y^2 - 3x + 10y + 16 = 0$
14	$y^2 - 8x + 12y + 76 = 0$	29	$y^2 - 2x - 8y + 6 = 0$
15	$y^2 - 3x - 10y + 31 = 0$	30	$y^2 - 2x + 6y + 7 = 0$

Визначити геометричні параметри  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\varepsilon$ , рівняння директрис, асимптот (там, де вони є). Побудувати криві.

#### Завдання 14.

Пряма і площина в  $\mathbf{R}^3$

Задані 4 точки:  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4, z_4)$ . Необхідно:

i) Скласти рівняння

а) площини  $A_1 A_2 A_3$ ;

б) прямої  $A_1 A_2$ ;

в) прямої  $A_4M$ , що перпендикулярна до площини  $A_1 A_2 A_3$ ;

г) прямої  $A_3N$ , що паралельна до прямої  $A_1 A_2$ ;

д) площини, яка проходить крізь точку  $A_4$  перпендикулярно до прямої  $A_1 A_2$ .

ii) Обчислити:

е) синус кута між прямою  $A_1 A_4$  та площиною  $A_1 A_2 A_3$ .

є) косинус кута між координатною площиною  $Oxy$  і площиною  $A_1 A_2 A_3$ .

- $A_1(3, 1, 4)$ ,  $A_2(-1, 6, 1)$ ,  $A_3(-1, 1, 6)$ ,  $A_4(0, 4, -1)$
- $A_1(3, -1, 2)$ ,  $A_2(-1, 0, 1)$ ,  $A_3(1, 7, 3)$ ,  $A_4(8, 5, 8)$
- $A_1(3, 5, 4)$ ,  $A_2(5, 8, 3)$ ,  $A_3(1, 2, -2)$ ,  $A_4(-1, 0, 2)$
- $A_1(2, 4, 3)$ ,  $A_2(1, 1, 5)$ ,  $A_3(4, 9, 3)$ ,  $A_4(3, 6, 7)$
- $A_1(9, 5, 5)$ ,  $A_2(-3, 7, 1)$ ,  $A_3(5, 7, 8)$ ,  $A_4(6, 9, 2)$
- $A_1(0, 7, 1)$ ,  $A_2(2, -1, 5)$ ,  $A_3(1, 6, 3)$ ,  $A_4(3, -9, 8)$
- $A_1(5, 5, 4)$ ,  $A_2(1, -1, 4)$ ,  $A_3(3, 5, 1)$ ,  $A_4(5, 8, -1)$
- $A_1(6, 1, 1)$ ,  $A_2(4, 6, 6)$ ,  $A_3(4, 2, 0)$ ,  $A_4(1, 2, 6)$
- $A_1(7, 5, 3)$ ,  $A_2(9, 4, 4)$ ,  $A_3(4, 5, 7)$ ,  $A_4(7, 9, 6)$
- $A_1(6, 8, 2)$ ,  $A_2(5, 4, 7)$ ,  $A_3(2, 4, 7)$ ,  $A_4(7, 3, 7)$
- $A_1(4, 2, 5)$ ,  $A_2(0, 7, 1)$ ,  $A_3(0, 2, 7)$ ,  $A_4(1, 5, 0)$
- $A_1(4, 4, 10)$ ,  $A_2(7, 10, 2)$ ,  $A_3(2, 8, 4)$ ,  $A_4(9, 6, 9)$
- $A_1(4, 6, 5)$ ,  $A_2(6, 9, 4)$ ,  $A_3(2, 10, 10)$ ,  $A_4(7, 5, 9)$
- $A_1(3, 5, 4)$ ,  $A_2(8, 7, 4)$ ,  $A_3(5, 10, 4)$ ,  $A_4(4, 7, 8)$

15.  $A_1(10, 9, 6), A_2(2, 8, 2), A_3(9, 8, 9), A_4(7, 10, 3)$
16.  $A_1(1, 8, 2), A_2(5, 2, 6), A_3(5, 7, 4), A_4(4, 10, 9)$
17.  $A_1(6, 6, 5), A_2(4, 9, 5), A_3(4, 6, 11), A_4(6, 9, 3)$
18.  $A_1(7, 2, 2), A_2(-5, 7, -7), A_3(5, -3, 1), A_4(2, 3, 7)$
19.  $A_1(8, -6, 4), A_2(10, 5, -5), A_3(5, 6, 8), A_4(8, 10, 7)$
20.  $A_1(1, -1, 3), A_2(6, 5, 8), A_3(3, 5, 8), A_4(8, 4, 1)$
21.  $A_1(1, -2, 7), A_2(4, 2, 10), A_3(2, 3, 5), A_4(2, -3, 5)$
22.  $A_1(4, 2, 10), A_2(1, 2, 0), A_3(3, 5, 7), A_4(2, -3, 5)$
23.  $A_1(2, 3, 5), A_2(5, 3, -7), A_3(1, 2, 7), A_4(4, 2, 0)$
24.  $A_1(5, 3, 7), A_2(-2, 3, 5), A_3(4, 2, 10), A_4(1, 2, 7)$
25.  $A_1(4, 3, 5), A_2(1, 9, 7), A_3(0, 2, 0), A_4(5, 3, 10)$
26.  $A_1(3, 2, 5), A_2(4, 0, 6), A_3(2, 6, 5), A_4(6, 4, -1)$
27.  $A_1(2, 1, 6), A_2(1, 4, 9), A_3(2, -5, 8), A_4(5, 4, 2)$
28.  $A_1(2, 1, 7), A_2(3, 3, 6), A_3(2, -3, 9), A_4(1, 2, 5)$
29.  $A_1(2, -1, 7), A_2(6, 3, 1), A_3(3, 2, 8), A_4(2, -3, 7)$
30.  $A_1(0, 4, 5), A_2(3, -2, 1), A_3(4, 5, 6), A_4(3, 3, 2)$

### Завдання 15

Дані квадратичні форми звести до канонічної форми, користуючись власними векторами і перетворенням координат

1.  $9x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$
2.  $x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$
3.  $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$
4.  $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3$
5.  $x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$
6.  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
7.  $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$
8.  $x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$
9.  $x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$
10.  $2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$
11.  $4x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4$
12.  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$
13.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$
14.  $4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$
15.  $x_1x_2 + x_2x_3$

16.  $4x_1^2 + 12x_2^2 - 13x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_2x_3$
17.  $x_1^2 + 18x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 30x_2x_3$
18.  $4x_1^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3 - 18x_2x_3$
19.  $x_1^2 + 5x_2^2 + 24x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$
20.  $x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_1x_4$
21.  $x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_4^2 - 4x_1x_2 + 20x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + 6x_3x_4$
22.  $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_5$

Привести до канонічного вигляду рівняння кривої за допомогою переходу до нової прямокутної системи координат. Вияснити вид кривої і знайти формули перетворення координат

23.  $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 12 = 0$
24.  $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 10x_1 + 70x_2 = 0$
25.  $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 = 0$
26.  $5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 20x_1 + 16x_2 + 11 = 0$
27.  $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$
28.  $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 + 2x_2 + 8 = 0$
29.  $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0$
30.  $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0$

### Завдання 16.

Звести до канонічного вигляду рівняння поверхонь другого порядку.

Встановити вид поверхні

1.  $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$
2.  $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10 = 0$
3.  $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$
4.  $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$
5.  $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y + 16z + 45 = 0$
6.  $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$
7.  $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$
8.  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 16zx - 2x + 6y + 2z = 0$
9.  $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 4x + z^2 + 3 = 0$

10.  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz + 8x - 4y + 12z + 10 = 0$
11.  $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 6yz + 12xz - 36 = 0$
12.  $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz + 4yz = 0$
13.  $x^2 - y^2 + 2z^2 + 2x + 4y - 8z = 0$
14.  $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$
15.  $(x + y)^2 + 2y + 2z = 0$
16.  $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$
17.  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$
18.  $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$
19.  $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 + xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$
20.  $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$
21.  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y - 10z = 0$
22.  $4x^2 + 2y^2 + 10z^2 - 4xy + 12xz - 8yz = 0$
23.  $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$
24.  $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$
25.  $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 8xy + 4yz + 4xz + 32x + 44y + 20z - 15 = 0$
26.  $2x^2 + y + 2 + z^2 + 4xz + 4xy + 2y - 4z - 1 = 0$
27.  $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4xy - 4yz + 6xz - 3 = 0$
28.  $x^2 - y^2 + 5z^2 - 6xz - 4yz + 6x - 4y + 2z = 0$
29.  $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz + 18x - 36z + 9 = 0$
30.  $x^2 + 8y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 6yz = 0$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

### Методичне забезпечення

1. Горбачевський І.Я. Алгебра і геометрія: конспект лекцій. [Електронний ресурс]: [ВНС НЛТУ України]. – Режим доступу: <https://veem.nltu.edu.ua/course/view.php?id=210> – необхідна авторизація
2. Горбачевський І.Я. Алгебра і геометрія: практичні заняття. [Електронний ресурс]: [ВНС НЛТУ України]. – Режим доступу: <https://veem.nltu.edu.ua/course/view.php?id=210> – необхідна авторизація

### Рекомендована література

#### Базова

1. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2020. – 205 с.
2. Барановська Л. В., Барановська Г. Г. Алгебра та аналітична геометрія : курс лекцій : електронне навчальне видання. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — 123 с.

#### Допоміжна

1. Дубовик В.П. Вища математика : навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І.Юрик. – Київ : А.С.К., 2020. – 647 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика : Збірник задач : навч. посіб. / В.П. Дубовик та ін. – Київ : «Ігнатекс-Україна», 2020. – 480 с.

#### 13. Інформаційні ресурси

1. Науково-технічна бібліотека НЛТУ України. URL: <https://library.nltu.edu.ua/>
2. Віртуальне навчальне середовище НЛТУ України. URL: <https://veem.nltu.edu.ua/>

#### ЗМІСТ

Вступ	.....	2
Завдання за темами і приклади їх розв’язання	.....	5
Вправи для самостійного опрацювання	.....	27
Список літератури	.....	51
Інформаційні ресурси	.....	52
Зміст	.....	52

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Алгебра та геометрія» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей F2 «Інженерія програмного забезпечення», F3 «Комп’ютерні науки», F6 «Інформаційні системи і технології», F7 «Комп’ютерна інженерія»/ Укл.: І.Я.Горбачевський. Львів: ННІ КНІТ НЛТУ України, 2026. 52 с.